ORSAY
SÉRIE A,
N° D'ORDRE
93

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Jean GRILHE

PREMIÈRE THÈSE

Contribution à l'étude des dislocations hélicoïdales

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le mars 1965 devant la Commission d'examen

MM. GUINIER — Président
FRIEDEL, LACOMBE — Examinateurs

ORSAY
SÉRIE A,
N· D'ORDRE ·
93

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Jean GRILHE

PREMIÈRE THÈSE

Contribution à l'étude des dislocations hélicoïdales

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le mars 1965 devant la Commission d'examen

MM. GUINIER — Président
FRIEDEL, LACOMBE — Examinateurs

UNIV. LEIDEN BIBL.

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen : M. ZAMANSKY

MM	BRELOT	T Analyse supérieure
	PRENANT	T Anatomie et histologie comparée
	GRASSE	T Evolution des êtres organisés
	PREVOST	T Chimie Organique
	WYART	T Minéralo & Cristallo
	TEISSIER	T Zoologie
	MANGENOT	T Biologie végé. (Orsay)
	AUGER	T Physique quantique et relativité
	MONNIER	T Physiologie générale
	PIVETEAU	T Paléontologie
	ROCARD	T Physique ENS
	CARTAN	T Mathématiques ENS
	LAFFITTE N.	T Chimie générale
	COULOMB	T Physique du globe
Mlle	COUSIN	T Biologie animale SPCN
	CHRETIEN	T Chimie minérale
	BOCQUET	T Zoologie
	KASTLER	T Physique ENS
	EPHRUSSI	T Génétique
	RIVIERE	T Géologie SPCN & Sédiment (Orsay)
	GAUTHERET	T Biologie végétale PCB
	LUCAS R.	T Recherches Physiques
	TOHMAS A.	T Biologie cellulaire
	ARNULF	T Optique appliquée
	MORAND	T Physique enseignement
	SOLEILLET	T Physique PCB
	FORTIER	T Mécanique exp. des fluides
	DRACH	T Zoologie
	QUENEY	T Météo & Dynamique atmos.
	GALLIEN	T Embryologie
	EICHORN	T Botanique
	DE CUGNAC	T Biologie végétale SPCN
Mlle	CAUCHOIS	T Chimie physique
	THELLIER	T Physique du globe
	L'HERITIER	T Biologie générale Orsay
	GRIVET	T Radioélectricité Orsay
	PONCIN	T Mécanique générale
	DU BREIL	T Arith & Théorie des nombres
	QUELET	T Chimie organique
	GAGNIARD	T Géophysique appliquée
	CHAMPETIER	T Chimie macromoléculaire
	CUVILLIER	T Micropaléontologie
	JUNG	T Géologie
	TRILLAT	T Microscopie et diffraction électro.
	WIEMANN	T Chimie organ. & struc.
	JACQUINOT	T Spectroscopie et Physique céleste (Orsay)
	VASSY	T Physique de l'atmosphère
	DESTOUCHES	T Théorie physique
	AMIEL	T Chimie générale
	HOCART	T Minéralo. & Cristalo.
	MATHIEU J. P.	T Physique optique
	COUTEAUX	T Cytologie
	MAY	T Zoologie
	CHOQUET	T Théorie des fonctions et topologie
	FELDMANN	T Biologie végétale marine
	GUINIER	T Physique des solides (Orsay)
	JOST	T Physiologie comparée
	FORTET	T Calcul des probabilités et Phys. Mathém.
	SCHWARTZ	T Calcul diff. & Intégral
	CHOUARD	T Physiologie végétale
	MALAVARD	T Aviation (Tech. Aéron.)
	NORMANT	T Synthèse organique
	BENARD	T Chimie minérale
	BUVAT	T Botanique ENS
	DUGUE	T Statistique mathématiques
	SOULAIRAC	T Psychophysiologie
	ULRICH	T Physiologie Vég. Appl.
	MARECHAL	T Optique théor. & appl.
	KIRRMANN	T Théories chimiques
	CHADEFAUD	T Botanique
Mlle	LE BRETON	T Physiol. de la nutrition
	LELONG	T Application de l'analyse à la géométrie
	DEVILLIERS	T Anatomie & Histo. compar.
	EHRESMANN	T Topologie algébrique
	FRANCON	T Physique SPCN
	GLANGEAUD	T Géographie phys. & géol.
	GODEMENT	T Mathématiques MGP
	PISOT	T Technique math. de la phys.
	ROCH	T Géologie
	SCHATZMANN	T Astrophysique
	TERMIER	T Géologie générale
	ZAMANSKY	T Mathématiques générales
	LENNUIER	T Physique MGP
	RIZET	T Génétique Orsay
	ROUTHIER	T Géologie appliquée
Mme	TONNELAT	T Physique théorique
	DIXMIER	T Mathématiques MPC
	SOUCHAY	T Chimie générale
	AIGRAIN	T Electrotechnique générale
	BRUSSET	T Chimie systématique
	LEVY M.	T Physique théorique des hautes énergies (Orsay)
Mme	CHAIX	T Chimie biologique
Mme	HUREL PY	T Biologie végétale PCB
	PANNETIER	T Chimie générale
	BRUN	T Mécanique des fluides I
	LEDERER	T Chimie biologique (Orsay)
Mme	DUBREIL	T Mathématiques (Agrég.)
Mme	LELONG	T Mathématiques II ENS
	BELLAIR	T Géologie SPCN
	COTTE	T Physique électricité
	DUBOIS J. E.	T Chimie organique
	LAMOTTE	T Zoologie ENS
	MICHEL A.	T Chimie minérale Orsay
	OLMER	T Energétique générale
	ROUAULT	T Electricité Orsay)
	GAUTHIER	T Mécanique appliquée
	BARCHEWITZ	T Chimie physique
	BROSSEL	T Physique atomique
	BUSER	T Physiologie comparée
	CAMUS	T Physiologie végétale
	CASTAING	T Physique II Thermo (Orsay)
	CURIEN	T Minéralo. & cristal.
	MOYSE	T Physiologie végétale (Orsay)
Mme	CHARNIAUX-COTTON	T Evolution des êtres organisés
	POSSOMPES	T Zoologie
	PULLMANN	T Chimie quantique
	TEILLAC	T Physique Nucl. & radioactivité (Orsay)
	TONNELAT	T Biol. Physico-chim. (Orsay)
	VILLE	T Econométrie
	WILLEMART	T Chimie PCB
	DODE	T Chimie (Orsay)
	FREYMANN	T Recherches physiques
	GUINOCHET	T Biologie végétale SPCN (Orsay)
	ROLLET	T Chimie minérale
Mlle	JOSIEN	T Chimie SPCN
	CHEVALLEY	T Géométrie algéb. et théorie des groupes
	ARNOULT	T Electronique Orsay
	CHAPELLE	T Physique I (Orsay)
	DELANGE	T Mathématiques I (Orsay)
	DENY	T Mathématiques générales (Orsay)
	GERMAIN	T Mécanique théorique des fluides
	LUCAS	T Géologie
	ALLARD	T Chimie physique
	BERTHELOT	T Physique des particules fondamentales (Orsay)
	BRICARD	T Météor. et physique de l'atmosphère
Mme	ALBE FESSARD	T Psycho-physio.
	FRIEDEL	T Physique des solides (Orsay)
	JULIA M.	T Etudes des moléculaires complexes
	LENDER	T Biologie animale SPCN (Orsay)
	MAGAT	T Physico chimie des radioéléments
Mlle	QUINTIN	T Electrochimie
	MONOD	T Chimie du métabolisme
	BENOIT	T Physio. animale (Orsay)
	DE POSSEL	T Analyse numérique
	CHARLOT	T Chimie analytique
	LEMEE	T Ecologie végétale (Orsay)
	GUERIN	T Chimie MPC (Orsay)
	CHATELET	T Chimie PCB
	JEAN	T Physio. nucléaire (Orsay)
	MATTLER	T Physique SPCN
	BERGERARD	T Zoologie (Orsay)
	BERTEIN	T Electronique (Orsay)
	BOUSSIERES	T Radiochimie
Mme	COUTURE	T Thermo. et méca. physique
	ELLENBERGER	T Géologie des grandes régions du globe (Orsay)
	FRANC	T Biologie animale PCB
	SCHNELL	Botanique tropicale
	STILKOWSKI	T Physiologie végétale
	ACHER	T Chimie biologique
	BAUDOIN	T Biologie animale PCB
	BEAUMONT	Biologie animale SPCN
	BLAMONT	Géophysique ionosphère
	BOUREAU	T Botanique
	CURIE D.	Physique MGP
	DURAND DELGA	T Géologie
	FREON	T Chimie organique (Orsay)
	HELLER	T Physiologie végétale
	TORTRAT	T Calcul des probabilités
	CAILLEUX	T Géologie SPCN
	MAGNAN	Physique électricité
	DAUDEL	T Mécanique ondulatoire appli. à la Chimie Théor. & à la Phys. Nucléaire
Mlle	FOURCROY	Biologie végétale SPCN
Mme	CHOQUET BRUHAT	Mécanique analytique et méca. céleste
Mlle	VEIL	T Physiologie générale
	LWOFF	T Microbiologie
	SIESTRUNCK	T Méca. phys. & expérimentale
	LACOMBE	T Métallurgie des métaux nucléaires (Orsay)
	BROCHARD	T Physique PCB (Orsay)
	CABANNES	T Mécanique générale
	LESIEUR	T Math. I (Orsay)
	MAZET	T Méca. générale (Orsay)
	CAIRE	Géographie physique et géo. dynamique
	COMOLET	Méca. des fluides
	CORABOEUF	T Physiologie animale (Orsay)
	DELLOUE	T Physique de l'atmosphère
	GORENFLOT	Botanique II (Orsay)
	HOUILLON	Biologie animale PCB
	JULLIEN J.	Chimie SPCN (Orsay)
	MALGRANGE	T Technique Math. de la physique (Orsay)
	OLIVIER	Antropologie
	NOZERAN	T Botanique II (Orsay)
	BLANC-LAPIERRE	T Physique ENS (Orsay)
	CHEVAUGEON	T Botanique (Orsay)
	KAHANE	T Mathématiques (Orsay)
	SAMUEL	T Mathématiques ENS féminines
	KOURGANOFF	T Astronomie (Orsay)
	THIRY	T Méca. céleste
	ABELES	Physique SPCN
	AMAT	T Physique PCB
	AUBOIN	T Géologie
Mme	BENOIT-GUEUTAL	T Physique nucléaire et radioactivité (Orsay)
	BOUGIS	Biologie marine Villefranche/mer
	BRUHAT	T Math. MPC
	BRUNN	T Géologie historique (Orsay)
	CHABBAL	T Physique MGP (Orsay)
	DENEUVELS	T Math. propé.
	DESPAGNAT	T Physique théorique (Orsay)
	FURON	T Géologie SPCN
Mme	GANS	T Génétique
	GENEVES	Biologie végétale PCB
	GUILBERT	Physique CUS Orléans
	HUPE	T Pétrographie
	HOLLANDE	T Biologie générale
	LIONS	T Analyse numérique
	MAITTE	T Chimie PCB
	MEYER	Physique propédeutique
	PANIGEL	Biologie générale
	RAVIER	Pétrographie
	ROSEAU	T Méca. théorique des fluides
	ROUBINE	Electronique
	SILBER	T Chimie PCB
	UEBERSFELD	T Electronique
	YVON	T Théories physiques
	HERVE	T Mathématiques
	NERON	T Math. MPC (Orsay)
Mme	PECKER WIMEL	T Astrophysique
	BALKANSKY	Physique MPC
	LE CORRE	T Electricité
	DELCROIX	T Physique théorique (Orsay)
	GOURDIN	Physique théorique des hautes énergies (Orsay)
	LEHMANN	T Phys. Exp. des hautes énergies
	NATAF	T Physique nucléaire et radioactivité (Orsay)
	ECHALIER	Biologie animale PCB
	BARRAUD	Physiologie cellulaire
	LIORET	Physiologie végétale (Orsay)
	DARS	Géologie structurale et Géologie appliquée
	CAMEFORT	T Botanique (agrégation)
	VICHNIEWSKY	T Mécanique industrielle
	BLAQUIERE	Electronique (Orssy)
	ARNOUS	T Physique théorique
	TATIBOUET	Chimie (CSU Orléans)
	MALLIAVIN	T Mathématiques propé. (Orsay)
	GAUDEMAR	Chimie propé.
	PEREZ Y JORBA	Physique Exp. des hautes énergies (Orsay)
	DAVID	T Chimie (agrégation Orsay)
	BROUSSE	T Mécanique théorique
	ROSCH	T Astronomie
	GUY	T Physique expérimentale
	LAZARD	Math MPC
	MOREL P.	Physique MPC
	ARSAC	Programmation
	LEFEBVRE	Chimie MPC
	CHAPEVILLE	Biochimie
	BENOIT	Physique CPEM
	RIO	Chimie CPEM
	JAUZEIN	Géologie ENS
	PREVOST C.	BV CPEM
	FAVARD P.	BA CPEM
	VILKAS	Chimie CPEM
Mlle	FICINI	Chimie CPEM
	LEQUEUX	Astronomie
	COHEN TANNOUDJI	Physique MPC
	TAVERNIER	Physique CPEM
Mme	ROIZEN	Physique CPEM
	DURAND M.	BA SPCN
	PASCAUD	Physiologie
Mme	PETIT	BA CPEN
	BROUSSE	Géologie (Orsay)
	CAGNIAC	Physique agrégation (Orsay)
	LEBERRE	Zoologie (Orsay)
	SCHEFFER	Microbiologie (Orsay)
	de GENNES	Physique des solides (Orsay)
	RIOU	Physique nucléaires exp. (Orsay)
	CLAUSER	Chimie biologique (Orsay)
	CHEVALIER	Physiologie animale (Orsay)
	JANCOVICI	Physique atomique (Orsay)
	FALK-VAIRANT	Physique nucléaire (Orsay)
	FETIZON	Chimie propé. (Orsay)
	CERF	Mathématiques (Orsay)

Secrétaire général : R. POULAIN

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Physique des Solides de la Faculté des Sciences d'Orsay sous la direction du Professeur J. Friedel qui m'a constamment guidé.

Je tiens à lui exprimer ici ma profonde reconnaissance.

Je remercie également le Docteur G. Saada pour ses conseils et l'intérêt qu'il a porté à mon travail.

J'ai bénéficié d'une bourse de Thèse du Commissariat à l'Energie Atomique. J'en remercie particulièrement M. F. Sébilleau.

Je remercie enfin Mesdames H. Coulle, O. Lanouzière et M.J. Bianquis qui ont assuré la frappe de cette thèse.

TABLE DES MATIÈRES

Pages

CHAPITRE I - Introduction 9

I.1 - Observations expérimentales 9

I.1.1 - Expériences d'Amelinckx, Bontinck et al 9
I.1.2 - Expériences de Dash 9
I.1.3 - Expériences dans les métaux trempés 10

I.2 - Géométrie de l'hélice 10

I.3 - Calcul de l'énergie d'une dislocation 11

Application aux hélices 13

CHAPITRE II - Propriétés de l'hélice ne faisant intervenir que le glissement 15

II.1 - Equilibre de l'hélice obtenu par glissement 15

II.1.1 - Calcul de la tension de ligne 15
II.1.2 - Cas particulier 16

II.1.3.1 - Cas général : calcul de l'énergie 17

II.1.3.2 - Détermination du rapport $\frac{2\pi p}{2a}$ correspondant au minimum de l'énergie 18

II.1.3.3 - Cas ou les extrémités de l'hélice sont soumises à une force extérieure 19
II.1.3.4 - Applications 19
II.1.3.5 - Comparaison avec les résultats expérimentaux 20

II.2 - Action d'une contrainte uniforme 20

II.2.1 - Forme d'équilibre 20
II.2.2 - Formation de sources 24

II.3 - Energie d'interaction entre les hélices et les dislocations de vecteurs de Burgers opposés 24

II.3.1 - Interaction avec les dislocations vis 25
II.3.2 - Cas des dislocations faisant un angle θ avec leur vecteur de Burgers . 27

CHAPITRE III - Equilibre et stabilité d'une dislocation hélicoïdale pouvant absorber ou émettre des lacunes 28

III.1 - Equilibre et stabilité de la taille des hélices 28

III.1.1 - Théorie de Weertman 28
III.1.2 - Instabilité d'une hélice ancrée à ses extrémités 29
III.1.3 - Instabilité d'une hélice dont les extrémités sont libres 30
III.1.4 - Conclusions 31

Pages

III.2 - Equilibre et stabilité de la forme hélicoïdale 31

III.2.1 - Présentation du calcul 31
III.2.2 - Equilibre de l'hélice 32
III.2.3 - Stabilité de l'hélice 33
III.2.4 - Résultats 35

CHAPITRE IV - Germination des hélices 36

IV.1 - Modèle d'Amelinckx et al 36

IV.2 - Modèle de Weertman 37

IV.3 - Modèle de germination proposé 38

IV.3.1 - Présentation du modèle 38
IV.3.2 - Réaction entre les boucles de trempe et les dislocations vis ou presque vis dans un système C.F.C. 39
IV.3.3 - Conclusions et comparaisons avec l'expérience 45

CHAPITRE V - Etude de la croissance des hélices 48

V.1 - Cas où les extrémités de l'hélice sont libres 48

V.2 - Cas où les extrémités de l'hélice sont fixes 49

Conclusion 51

Annexe I : Calcul de l'énergie d'une dislocation 52

Annexe II : Energie d'interaction d'une hélice avec une dislocation vis 54

Annexe III : Forme d'équilibre de l'hélice en présence d'une dislocation vis 56

Annexe IV : Calcul de Δw au second ordre 58

Annexe V : Calcul de S(k) 60

Annexe VI : Calcul de Δw au second ordre pour $p \gg a$ et $p \ll a$ 61

Annexe VII : Forme des hélices correspondant au minimum de l'énergie pour un nombre de lacunes absorbées donné 63

Annexe VIII : Calcul de l'énergie d'une spire nuclée sur une dislocation vis 64

Tableau IV.1 (d'après Whelan) 39

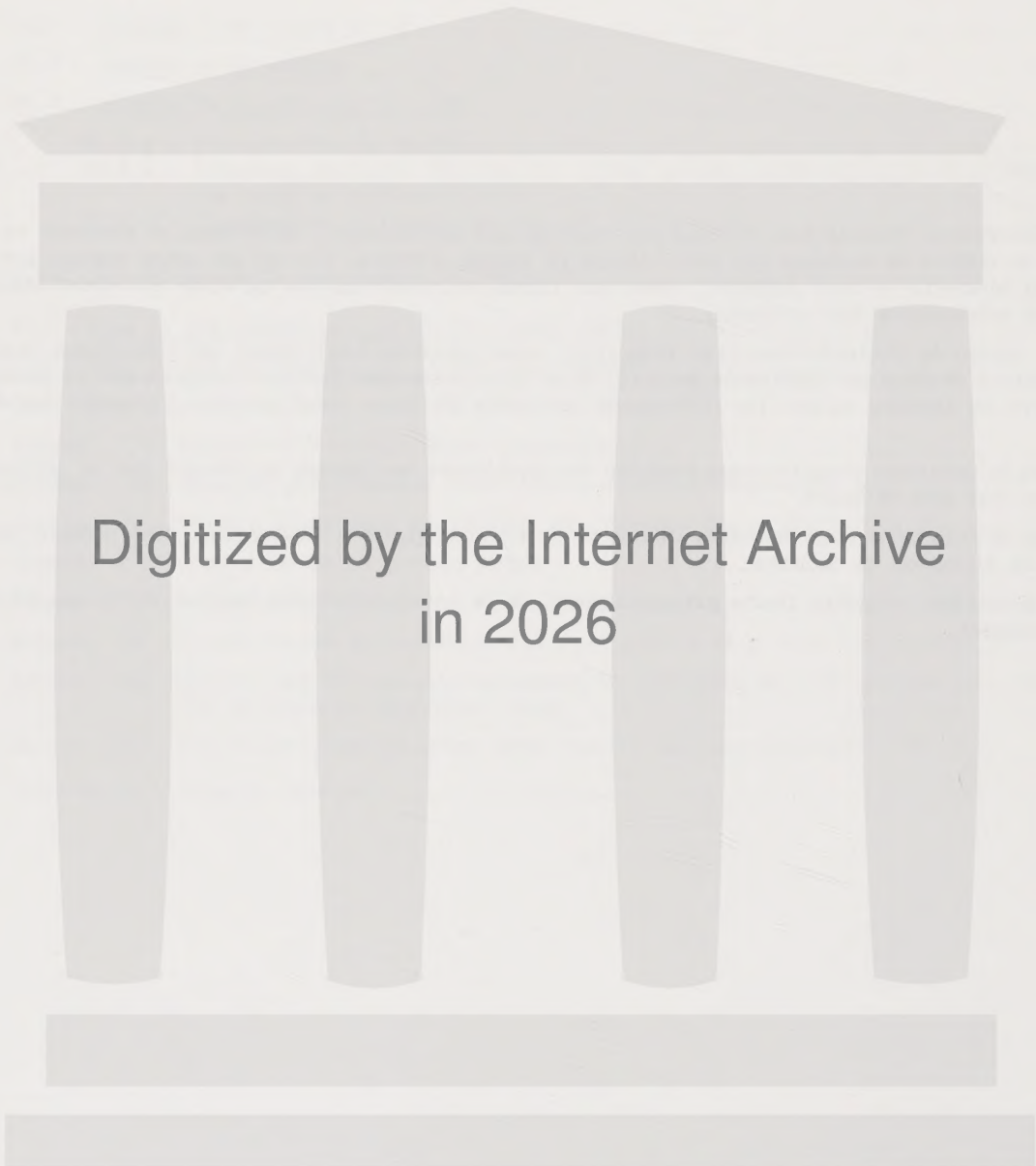
L'observation directe des cristaux par microscopie électronique, décoration et méthode de Lang a permis de mettre en évidence des dislocations en forme d'hélice. Le but de notre travail est d'étudier leur formation et leur stabilité, ainsi que certaines modifications qu'elles entraînent dans les propriétés mécaniques des cristaux.

Au cours de l'introduction (1er chapitre), nous exposons brièvement les principaux résultats expérimentaux obtenus par différents auteurs. Nous faisons ensuite quelques rappels sur la géométrie particulière de l'hélice et sur les différentes méthodes utilisées pour calculer l'énergie des dislocations.

Dans le deuxième chapitre nous étudions les problèmes ne faisant intervenir que le glissement de l'hélice sur son cylindre.

Dans le troisième nous abordons l'étude de la stabilité quand la dislocation peut monter par absorption ou émission de lacunes.

Le quatrième chapitre traite principalement de la germination des hélices et le cinquième de leur croissance.


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534917_0054

CHAPITRE I

OBSERVATIONS EXPÉRIMENTALES ET GÉNÉRALITÉS SUR LES DISLOCATIONS HÉLICOIDALES

I.1 - Observations expérimentales.

On observe des hélices dans certains cristaux ayant subi un traitement provoquant une sur ou sous-saturation de lacunes. Les défauts créés précipitent sur les dislocations et les font monter. Les dislocations à caractère vis forment alors des hélices. Ceci a été mis en évidence par un certain nombre d'expériences que nous allons rappeler.

I.1.1 - Expériences d'Amelinckx [1], Bontinck [15, 16] et al.

Les premières observations d'hélices ont été faites par Amelinckx, Bontinck et al dans des cristaux ioniques (NaCl, CaF_2, KCl).

Le traitement subi par ces cristaux est le suivant : on introduit localement un excès du métal (Na, K, Ca) et on porte le cristal à haute température (1200°C). Les atomes du métal en excès diffusent à travers le cristal et précipitent en partie sur les dislocations sous forme colloïdale. Cette précipitation s'accompagne, suivant Amelinckx, d'une émission de lacunes des deux constituants par les dislocations. Qaund celles-ci sont à caractère vis elles "montent" en formant des hélices de diamètre variant de quelques dixièmes à quelques dizaines de microns. Le pas est en général du même ordre de grandeur. Ces dislocations décorées par le métal sous forme colloïdale sont observées avec un ultra-microscope. Amelinckx a proposé un modèle de formation des hélices : la dislocation à caractère vis est ancrée à ses deux extrémités. En montant, elle tourne autour de ses points d'ancrage en formant un certain nombre de spires (fig. I.1). Nous critiquerons ce modèle dans la dernière partie de notre travail. Il permet cependant de voir que la dislocation tournera dans un sens ou dans l'autre suivant que la montée se fait par émission ou absorption de lacunes (fig. I.1 et I.2).

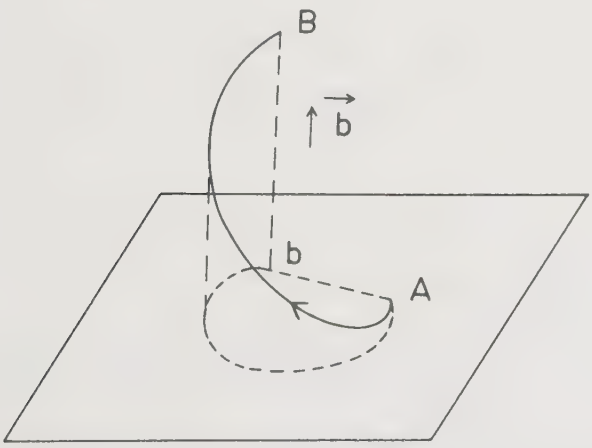


Fig. I.1 - Modèle d'Amelinckx ; montée de la dislocation par absorption de lacunes.

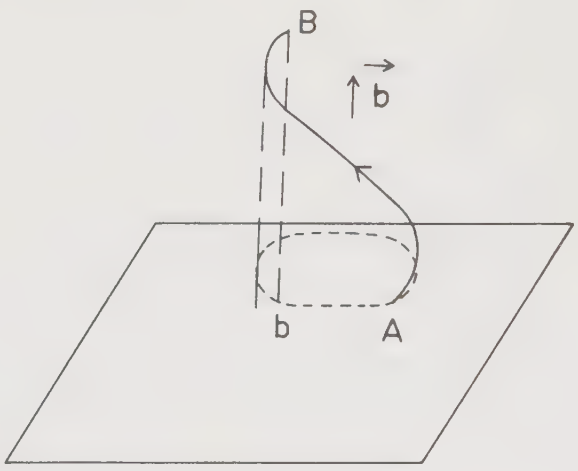


Fig. I.2 - Montée de la dislocation par émission de lacunes.

I.1.2 - Expérience de Dash [2, 17, 18].

Dash a observé des hélices dans du silicium en provoquant une sous saturation de lacunes de

la façon suivante : un cristal de silicium sur lequel on a déposé une mince couche d'or est maintenu un certain temps à 1200°C. Les atomes d'or diffusent vers l'intérieur en positions interstitielles et se mettent en positions de substitution quand ils rencontrent des lacunes. De nouvelles lacunes sont alors émises par les dislocations de façon à maintenir une concentration égale à la valeur d'équilibre.

En utilisant des cristaux ne contenant qu'un petit nombre de dislocations dont il connaissait les vecteurs de Burgers, Dash a montré que les dislocations vis se transformaient en hélices de diamètres variant de quelques dixièmes à quelques dizaines de microns. Le sens d'enroulement de ces hélices montre sans ambiguité qu'elles ont été formées par émission de lacunes. Une forte concentration d'or au voisinage des hélices, mesurée à l'aide d'atomes d'or radioactifs (Au^{198}), confirme le rôle de ces atomes dans le mécanisme.

I.1.3 - Expérience de trempe des alliages et des métaux.

Les expériences de trempe permettent aussi d'obtenir de nombreuses hélices. Les lacunes, en forte sursaturation, précipitent sur les dislocations et les font monter. Thomas [3] et Whelan, en trempant un alliage aluminium cuivre à 4 % à partir de 540°C, ont obtenu des hélices très régulières dont les diamètres varient de 250 Å à 1500 Å. Le pas est en général du même ordre de grandeur que le diamètre. En trempant à partir de 440°C, les hélices obtenues sont beaucoup moins régulières ; les diamètres sont plus petits (100 à 150 Å) et trois ou quatre fois plus petits que le pas. Suivant Thomas et Whelan, les lacunes en sursaturation seraient en moins grand nombre et auraient moins de temps pour précipiter sur les dislocations.

Des expériences de trempe faites avec d'autres alliages à base d'aluminium donnent des résultats semblables.

Par contre, dans l'aluminium pur les hélices ont des dimensions de l'ordre de plusieurs microns et elles ne peuvent pas être observées par microscopie électronique. Elles ont été observées à l'aide de rayons X par Lang [4] et Authier [5] en utilisant la méthode de Lang.

Les expériences d'irradiation permettent aussi de faire monter les dislocations vis en hélice. Barnes [21] en a observé dans des alliages à base d'aluminium et dans du cuivre.

I.1.4 - Hélices formées à partir de précipités.

Il existe un autre type d'hélices ayant pour origine la présence dans le cristal de petits précipités. Pendant la trempe, des contraintes dues à la différence du coefficient de dilatation thermique apparaissent autour des précipités. Elles sont relâchées par émission de boucles de dislocations ou d'hélices. Jones [6] et Mitchell ont pu mettre ce mécanisme en évidence à l'aide d'inclusions de verre dans des cristaux ioniques. On observe aussi de telles hélices autour des précipités de $Mg_3 Al_2$ dans les alliages Al 5 % Mg.

Les configurations d'équilibre de ces empilements de boucles ont été calculées par Bullough [7] et Neuwman.

Dans la suite de cet exposé nous nous intéresserons uniquement aux hélices crées par sur ou sous saturation de défauts ponctuels.

I.2 - GEOMETRIE DE L'HELICE (fig. I.3).

Dans ce paragraphe nous définissons les paramètres des hélices et nous rappelons les propriétés géométriques que nous aurons à utiliser par la suite.

Les dislocations en hélice observées ont toutes leur axe parallèle à leur vecteur de Burgers. En prenant cet axe comme axe Oz et en choisissant convenablement Ox l'hélice a pour équation :

$$\underset{\sim}{r} = a \cos \varphi \, \underset{\sim}{i} + a \sin \varphi \, \underset{\sim}{j} + p \, \varphi \, \underset{\sim}{k}$$

a et $2 \pi p$ représentent le rayon et le pas de l'hélice, $\underset{\sim}{i}$ $\underset{\sim}{j}$ et $\underset{\sim}{k}$ sont les vecteurs unitaires le long des axes Ox, Oy et Oz.

La longueur d'un arc ds correspondant à un angle $d\varphi$ se met sous la forme :

$$ds = \sqrt{a^2 + p^2} \, . \, d\varphi$$

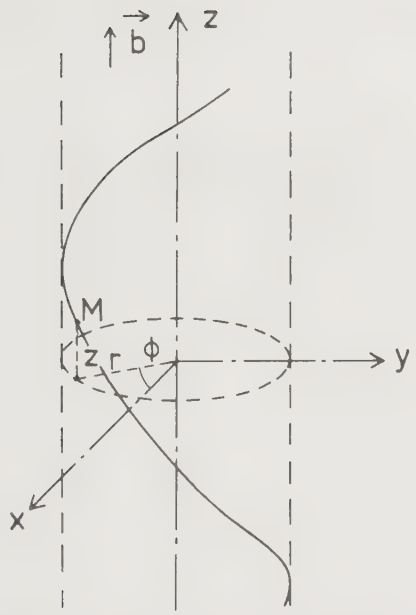


Fig. I.3 - Axes de coordonnées de l'hélice.

Le vecteur unitaire tangent à l'hélice est donné par :

$$\underset{\sim}{t} = \frac{d\underset{\sim}{r}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + p^2}} (- a \sin \varphi . \underset{\sim}{i} + a \cos \varphi . \underset{\sim}{j} + p \underset{\sim}{k})$$

D'autre part, si R est le rayon de courbure et $\underset{\sim}{n}$ le vecteur unitaire normal nous avons :

$$\frac{d\underset{\sim}{t}}{ds} = \frac{\underset{\sim}{n}}{R} = \frac{a}{a^2 + p^2} (- \cos \varphi . \underset{\sim}{i} - \sin \varphi . \underset{\sim}{j})$$

soit :

$$R = \frac{a}{a^2 + p^2}$$

$$\underset{\sim}{n} = - \cos \varphi . \underset{\sim}{i} - \sin \varphi . \underset{\sim}{j}$$

Le nombre de lacunes ou d'interstitiels nécessaires pour créer une spire d'hélice se met sous la forme :

$$N = \frac{| \underset{\sim}{S} \wedge \underset{\sim}{b} |}{b^3} = \frac{\pi a^2}{b^2}$$

S étant la surface balayée pendant la montée par la dislocation de vecteur de Burgers $\underset{\sim}{b}$.

I.3 - CALCUL DE L'ENERGIE D'UNE DISLOCATION [8, 9, 12].

Dans ce paragraphe nous précisons les méthodes de calcul d'énergie que nous aurons à utiliser.

I.3.1 - Définition de l'énergie.

La théorie de l'élasticité linéaire permet de calculer les contraintes σ_{ij} et les distorsions e_{ij}

créées par une dislocation dans un cristal de volume V. L'énergie de la dislocation est par définition :

$$W = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \, e_{ij} \, dV$$

cette énergie doit être intégrée dans tout le volume du cristal excepté à l'intérieur d'un cylindre de rayon r_o et ayant pour axe la dislocation. Cette dernière région est appelée le coeur de la dislocation. Les déformations y sont très importantes et l'utilisation de l'élasticité linéaire n'y est plus valable. On ne sait pas calculer l'énergie du coeur mais on montre qu'elle est négligeable devant celle contenue dans le reste du cristal. Le rayon de coupure r_o est de l'ordre de grandeur d'une distance interatomique. L'énergie ainsi calculée varie en fonction du rayon de coupure ; mais la dépendance en r_o étant logarithmique, ces variations sont négligeables pour des valeurs de r_o raisonnables.

Les contraintes σ_{ij} et les distorsions e_{ij} en un point peuvent se mettre sous la forme d'intégrales curvilignes prises sur le contour de la dislocation. On peut de même mettre l'énergie :

$$W = \frac{1}{2} \int \sigma_{ij} \, e_{ij} \, dV$$

sous forme d'une intégrale double curviligne, mais il faut modifier quelque peu les formules pour ne pas compter l'énergie contenue dans le coeur de la dislocation.

A chaque type de modification correspond une méthode différente de calcul d'énergie. Dans chaque méthode on introduit un rayon de coupure ayant une interprétation physique simple mais étant différent du rayon de coeur r_o de la dislocation. On calcule pour chaque méthode la valeur du rayon de coupure en fonction de r_o de façon à trouver les mêmes résultats qu'avec la méthode directe :

$$W = \int_V \sigma_{ij} \, e_{ij} \, dV$$

Les différentes méthodes sont alors équivalentes. La méthode que nous utiliserons est la suivante :

I.3.2 - Méthode utilisée.

Cette méthode consiste à utiliser le calcul de l'énergie d'interaction de la dislocation (c) avec une dislocation voisine (c') se déduisant de (c) par translation et ayant un vecteur de Burgers opposé $-\underset{\sim}{b}$- L'énergie élastique emmagasinée dans le cristal est égale à :

$$W = W_c + W_c' + W_{cc}' = 2 \, W_c + W_{cc}'$$

Les deux dislocations ayant même forme et des vecteurs de Burgers égaux en valeur absolue ont des self-énergies W_c et W_c', égales.

W_{cc}' est l'énergie d'interaction entre les deux dislocations. Elle a été calculée dans le cas général [12] et se met sous la forme d'une intégrale curviligne double prise sur chacune des dislocations. Les formules obtenues ne sont valables qu'en élasticité linéaire c'est-à-dire pour des distances entre dislocations supérieures au rayon de coeur r_o.

Quand on fait tendre la distance entre (c) et (c') vers zéro, on reconstitue le cristal parfait et l'énergie W emmagasinée dans le cristal devient nulle. On obtient :

$$W_c = - \frac{1}{2} W_{cc}'$$

Pour pourvoir utiliser l'élasticité linéaire on calcule W_{cc}' quand la distance entre les dislocations est égale à r_o. L'énergie emmagasinée dans le cristal est alors de l'ordre de l'énergie de coeur et on peut la négliger. On obtient ainsi les mêmes résultats qu'avec la méthode directe $W = \int_V \sigma_{ij} \, e_{ij} \, dV$.

Cette méthode conduit aux formules suivantes :

En prenant l'axe Oz parallèle au vecteur de Burgers l'énergie d'une dislocation quelconque se met sous la forme :

$$W = \frac{\mu b^2}{8\pi} \oint_c - \frac{1+\nu}{1-\nu} A_z \, dz + \frac{1}{1-\nu} (B_r \, dr + B_\phi \, r \, d\varphi + B_z \, dz) \qquad (I.1)$$

avec :

$$A_z = \oint_{c'} \frac{dz'}{R}$$

$$B_r = \oint_{c'} \left(\frac{1}{R} + \frac{Z^2}{R^3} \right) (\cos \Phi \, dr' + r' \sin \Phi \, d\varphi')$$

$$B_\varphi = \oint_{c'} \left(\frac{1}{R} + \frac{Z^2}{R^3} \right) (- \sin \Phi \, dr' + r' \cos \Phi \, d\varphi')$$

$$B_z = \oint_{c'} \left(\frac{1}{R} + \frac{Z^2}{R^3} \right) dz'$$

$$R^2 = r^2 + r'^2 - 2 rr' \cos \Phi + Z^2$$

$$Z = z - z'$$

$$\Phi = \varphi - \varphi'$$

μ et ν sont le module de cisaillement et le coefficient de Poisson du cristal ; b est le vecteur de Burgers ; r, φ, z et r', φ', z' sont les coordonnées cylindriques des deux dislocations (c) et (c').

En posant :

$$\tau_z = \frac{\mu b^2}{8\pi(1-\nu)} (-(1+\nu) A_z + B_z)$$

$$\tau_r = \frac{\mu b^2}{8\pi(1-\nu)} B_r \qquad (I.2)$$

$$\tau_\varphi = \frac{\mu b^2}{8\pi(1-\nu)} B_\varphi$$

l'énergie de la dislocation devient :

$$W = \oint_c \tau_z \, dz + \tau_r \, dr + \tau_\varphi \, r \, d\varphi = \oint_c \underset{\sim}{\tau}(r, \varphi, z) \underset{\sim}{dl}$$

τ (r, φ, z) est la tension de ligne de l'élément $\underset{\sim}{dl}$ de coordonnées r, φ, z. Cette tension de ligne peut être interprétée comme étant égale à la moitié de l'énergie d'interaction de l'élément $\underset{\sim}{dl}$ de la dislocation (c) avec la dislocation (c').

I.3.3 - Variante de la méthode utilisée.

On peut considérer l'énergie $\underset{\sim}{\tau}(r, \varphi, z) \underset{\sim}{dl}$ comme étant égale à la moitié de l'énergie d'interaction de l'élément dl de la dislocation (c) avec la dislocation (c) elle-même. L'élasticité linéaire ne permet pas de calculer l'énergie d'interaction entre deux éléments dl et dl' quand la distance R entre ces deux éléments est inférieure à $\frac{r_o}{2}$. On néglige ces interactions, ce qui revient à négliger l'énergie de coeur de la dislocation. Les formules obtenues sont analogues à celles de la méthode précédente (I.2) il suffit de remplacer l'integration sur (c') par une integration sur (c) avec la condition $|R| > \frac{r_o}{2}$. Ces formules sont données en annexe.

Cette méthode ne fait intervenir le rayon de coupure que dans les bornes de l'intégrale. Nous l'avons utilisée quand cela simplifiait les calculs.

I.3.4 - Application au calcul de l'énergie d'une hélice.

En utilisant deux dislocations (c) et (c') distantes de r_o de Wit [24] a calculé l'énergie d'une hélice (c) de longueur L, d'équation :

$$(c)\quad \begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = a\sin\varphi \\ z = p\varphi \end{cases} \qquad (c')\quad \begin{cases} x = a'\cos\varphi \\ y = a'\sin\varphi \\ z = p\varphi \\ a' = a + r_o \end{cases}$$

En supposant la longueur de l'hélice grande devant le diamètre et le diamètre grand devant le rayon de coeur r_o, l'énergie peut s'exprimer sous forme de séries de fonctions de Bessel. De Witt a explicité le résultat dans les deux cas suivants :

1er cas $p \ll a$.

Le pas est petit devant le diamètre. Un développement au deuxième ordre en $\frac{p}{a}$ donne :

$$W = L\frac{\mu b^2}{4\pi(1-\nu)}\left|\frac{a^2}{p^2} + \frac{a}{p}\left(\mathrm{Log}\frac{p}{r_o} - 1\right)\right| + L\frac{\mu b^2}{4\pi}\left|\mathrm{Log}\frac{2L}{a} - \frac{2-\nu}{1-\nu}\right|$$

Le premier terme, qui est le plus important, correspond à l'énergie de répulsion des spires entre elles.

Deuxième cas $p \gg a$.

Le pas est grand devant le diamètre. On obtient :

$$W = L\frac{\mu b^2}{4\pi}\left|\mathrm{Log}\frac{2L}{r_o} - \frac{2-\nu}{1-\nu} + \frac{a^2}{4p^2}\left(2\frac{1+\nu}{1-\nu}\left(\mathrm{Log}\frac{2p}{r_o} - \gamma\right) - \frac{5-\nu}{1-\nu}\right)\right| \qquad (I.4)$$

γ est la constante d'Euler.

Le terme le plus important est égal à l'énergie d'une dislocations vis de même longueur.

CHAPITRE II

PROBLÈMES RELATIFS AU GLISSEMENT

Dans ce chapitre nous supposons que la dislocation peut glisser sur son cylindre mais ne peut pas monter par absorption ou émission de lacunes. C'est par exemple le cas quand la température est suffisamment basse pour que les lacunes ne puissent pas diffuser.

Les résultats obtenus resteront valables tant que la vitesse de montée est faible devant la vitesse de glissement.

- Dans le premier paragraphe nous calculons le pas d'équilibre de l'hélice en fonction des forces s'exerçant à ses extrémités.

- Dans le second nous étudions l'action d'une contrainte uniforme sur une hélice, ce qui nous permet de déterminer la limite élastique théorique d'un cristal dont les dislocations ont des formes hélicoïdales.

- Dans le troisième paragraphe, nous calculons les forces exercées par l'hélice sur les dislocations de vecteurs de Burgers opposés. Les réactions d'une hélice avec ces dislocations conduisent à la formation de boucles prismatiques (Amelinckx [1]).

II.1 - EQUILIBRE DE L'HELICE OBTENU PAR GLISSEMENT.

On suppose que les lacunes ne peuvent diffuser ni en volume ni le long de la dislocation. Celle-ci ne peut pas monter ; le diamètre 2a et le nombre de spires n de l'hélice restent alors constants. Par contre, l'hélice peut glisser sur son cylindre de glissement. On suppose que ses extrémités peuvent se déplacer parallèlement à son axe. Le pas $2\pi p$ et la longueur $L = n\, 2\pi p$ peuvent varier.

Les calculs d'énergie de De Witt dans les cas extrêmes $p \ll a$ et $p \gg a$ montrent l'existence d'au moins un minimum pour une certaine valeur de $2\pi p/2a$. La raison physique de ce minimum est la suivante : quand on augmente le pas de l'hélice la longueur et par conséquent l'énergie d'une spire augmentent rapidement. Par contre quand le pas devient très petit l'énergie de répulsion entre spires successives devient très importante. Dans ce paragraphe nous calculons l'énergie de l'hélice pour toutes les valeurs de $\frac{2\pi p}{2a}$ ce qui nous permet de montrer l'existence d'un seul minimum de de l'énergie pour une valeur de $\frac{2\pi p}{2a}$ que nous précisons.

Nous déterminons le rapport d'équilibre $2\pi p/2a$ dans un cas particulier (I.2) en calculant l'énergie de l'hélice en fonction de p/a à l'aide d'une machine à calculer.

Nous étudions ensuite (I.3) le cas d'une hélice de longueur et le diamètre quelconques. A l'aide des résultats précédents nous en calculons l'énergie ; nous déterminons le rapport $2\pi p/2a$ d'équilibre et le coefficient élastique de l'hélice quand une force est appliquée à ses extrémités.

II.1.1 - Calcul de la tension de ligne de l'hélice.

La tension de ligne étant constante il suffit de la calculer en un point. Nous la calculons au milieu de l'hélice en négligeant les interactions avec les autres dislocations du cristal. La longueur des hélices étudiées étant du même ordre de grandeur que la taille du réseau de Frank, ces interactions sont en effet négligeables. En utilisant les formules (I.2), la tension de ligne d'une hélice de longueur $L = 2n\pi p$ se met sous la forme :

$$\tau = \frac{\mu\, b^2}{8\,\pi\,\sqrt{a^2 + p^2}\,(1 - \nu)} \int_{-n\pi}^{+n\pi} \left[-(1+\nu)\frac{p^2}{R} + \left(\frac{1}{R} + \frac{p^2\,\Phi^2}{R^3}\right)(p^2 + a\,a'\cos\Phi) \right] d\Phi$$

n est égal au nombre de spires.

L'énergie totale de l'hélice est alors :

$$W = 2\,n\,\pi.\ \sqrt{a^2 + p^2}.\ \times \tau$$

II.1.2 - Cas particulier.

En utilisant une calculatrice électronique nous avons calculé l'énergie d'une hélice de 10 spires et de rayon a = 1000 r_o. La courbe de la figure II.1 représente cette énergie en fonction de $\frac{p}{a} = c$. Elle présente un minimum pour $\frac{p}{a} = 0,45 \pm 0,01$ ce qui correspond à un rapport d'équilibre du pas sur le diamètre égal à $\frac{2\,\pi\,p}{2\,a} = 1,4$.

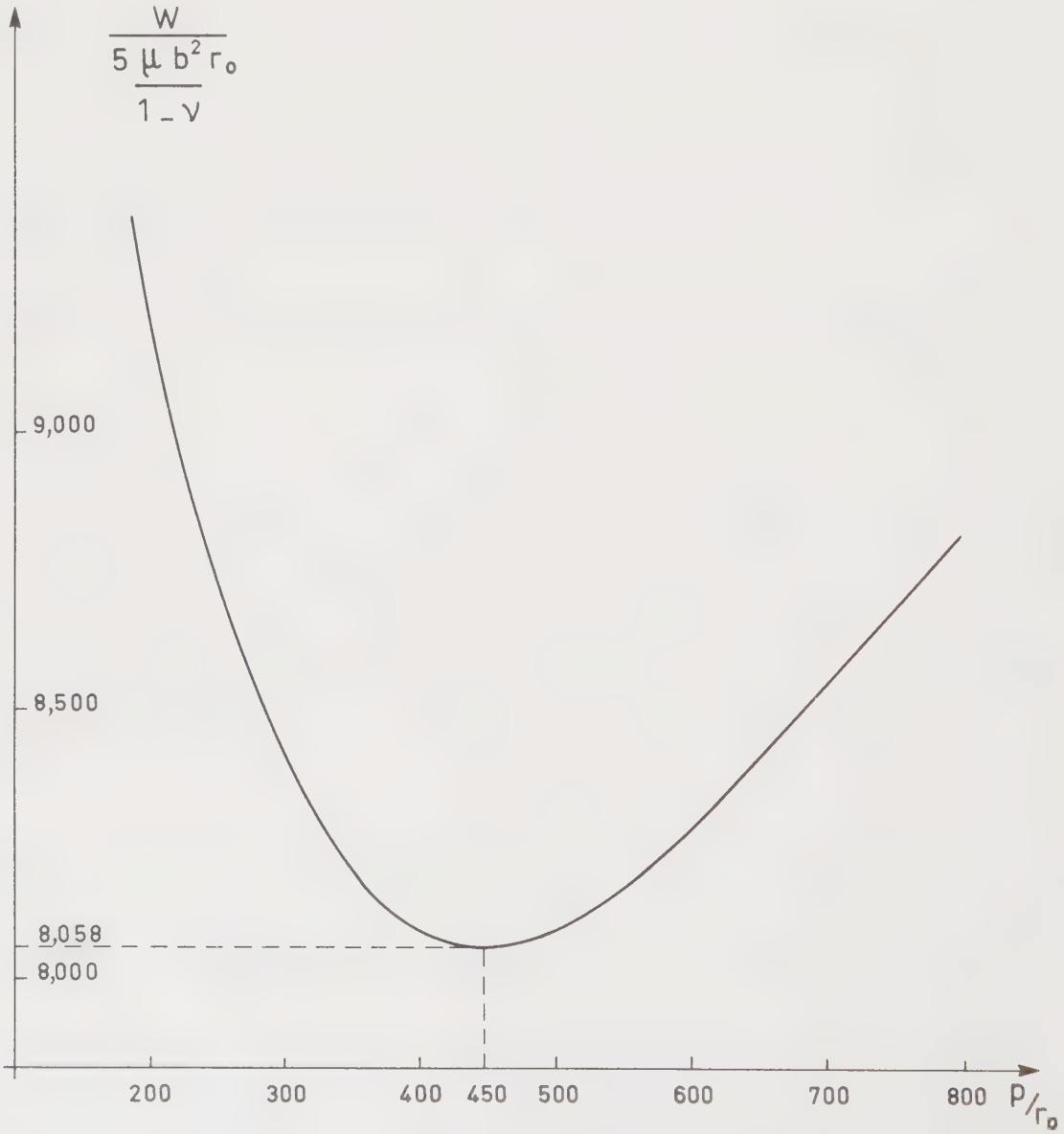


Fig. II.1 - Energie d'une hélice de 10 spires et de diamètre 2 a = 2000 r_o en fonction du pas 2 π p.

Au voisinage de cette position d'équilibre on peut remplacer la courbe obtenue par une parabole. L'énergie est alors donnée par :

$$W = \mu b^2 r_o \left[57\,560 + 74\,280 \left(\frac{p}{a} - 0,45 \right)^2 \right]$$

ce qui correspond à une énergie par unité de longueur égale à :

$$\tau = \frac{\mu b^2}{\pi \sqrt{1 + c^2}} [2,878 + 3,714 (c - 0,45)^2]$$

A l'équilibre la tension de ligne τ est donc égale à $1,1\ \mu b^2$.

II.1.3 - Cas général.

II.1.3.1 - Calcul de l'énergie.

On utilise pour calculer la tension de ligne les formules ne faisant intervenir le rayon de coupure r_o que dans les bornes de l'intégrale donnant l'énergie (annexe 1).

En posant $p/a = c$, l'énergie d'une hélice de n spires et de diamètre 2 a s'écrit :

$$W = n.a.\mu b^2 \int_{\frac{r_o}{2a\sqrt{1+c^2}}}^{n\pi} f(c, \varphi)\, d\varphi$$

avec :

$$f(c, \varphi) = \frac{1}{2(1 - \nu)} \left[- (1 + \nu) \frac{c^2}{R'} + \left(\frac{1}{R'} + \frac{c^2 \varphi^2}{R'^3} \right) (c^2 + \cos \varphi) \right]$$

et :

$$R' = \sqrt{c^2 \varphi^2 + 2 (1 - \cos \varphi)}$$

On n'étudie dans la suite de ce chapitre que les hélices dont la longueur est grande devant le diamètre et dont le diamètre est grand devant le rayon de coupure r_o, soit :

$$L = n.2\pi p \gg 2a$$

$$2a \gg r_o$$

On suppose que l'on connaît l'énergie $W_o(c)$ d'une hélice particulière H_o de diamètre $2a_o$ et et dont le nombre de spires est égal à n_o.

On peut alors calculer l'énergie d'une hélice quelconque en coupant l'intégrale donnant W en 3 parties :

$$W(a, n, c,) = n.a\mu b^2 \left[\int_{\frac{r_o}{2a\sqrt{1+c^2}}}^{\frac{r_o}{2a_o\sqrt{1+c^2}}} + \int_{\frac{r_o}{2a_o\sqrt{1+c^2}}}^{n_o\pi} + \int_{n_o\pi}^{n\pi} f(c, \varphi)\, d\varphi \right]$$

La seconde intégrale est égale, à un coefficient près, à l'énergie $W_o(c)$ de l'hélice particulière H_o.

Pour calculer la première et la troisième intégrale on utilise les développement de $f(c, \varphi)$ en fonction de φ et $\frac{1}{c\varphi}$.

Dans la première, φ varie entre $\frac{r_o}{2a\sqrt{1 + c^2}}$ et $\frac{r_o}{2a_o\sqrt{1 + c^2}}$. La condition $2a \gg r_o$ impose à φ d'être toujours très inférieur à 1. On peut alors remplacer $f(c, \varphi)$ par les premiers termes de son développement en fonction de φ.

Dans la seconde intégrale φ varie entre $n_o \pi$ et $n\pi$. La condition $n.2\pi p \gg 2a$ entraîne $\frac{1}{c\varphi} \ll 1$. On utilise alors le développement de $f(c, \varphi)$ en fonction de $\frac{1}{c\varphi}$.

Après intégration on obtient :

$$W = \mu b^2 \times n a \left[\frac{W_o(c)}{n_o a_o} + \frac{c}{2} \log \frac{n}{n_o} + \frac{1}{2(1 - \nu)} \frac{c^2 + 1 - \nu}{\sqrt{1 + c^2}} \log \frac{a}{a_o} \right]$$

On peut prendre comme hélice particulière H_o l'hélice de 10 spires ($n_o = 10$) et de rayon $a_o = 1000\ r_o$ dont nous avons calculé l'énergie $W_o(c)$ dans le paragraphe précédent. On obtient alors l'expression de l'énergie d'une hélice quelconque, au voisinage de $c = 0,45$:

$$W = \mu\, b^2.\ n\, a \left[5,76 + 7,42\ (c - 0,45)^2 + \frac{c}{2} \log \frac{n}{10} + \frac{c^2 + 1 - \nu}{2\,(1 - \nu)\,\sqrt{1 + c^2}} \log \frac{a}{1000\ r_o} \right]$$

avec $c = p/a$.

Connaissant l'énergie de l'hélice, nous pouvons déterminer sa position d'équilibre quand elle peut glisser sur son cylindre.

II.1.3.2 - Détermination du rapport $\frac{2\pi p}{2a}$ correspondant au minimum de l'énergie.

Les hypothèses sont les suivantes :

Le nombre de spires et le diamètre de l'hélice restent constants. L'hélice peut glisser sur son cylindre et les extrémités peuvent se déplacer librement parallèlement à Oz. On suppose de plus que ces déplacements n'entraînent pas de variations d'énergie des autres dislocations du cristal, c'est-à-dire que la force exercée par ces dislocations sur les points d'ancrage n'a pas de composante parallèle à Oz. C'est par exemple le cas représenté par la figure II.2.

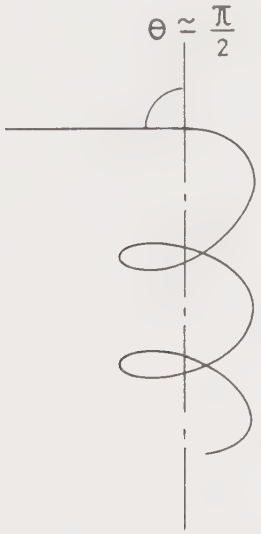


Fig. II.2 - Hélice dont les extrémités ne sont soumises à aucune force parallèle à Oz.

Fig. II.3 - Cas où la force exercée sur les extrémités de l'hélice est petite.

L'équilibre de la dislocation est donné par :

$$\frac{\partial W}{\partial p} = \frac{1}{a} \frac{\partial W}{\partial c} = 0, \text{ W étant donné par la formule (II.3)}$$

soit :

$$c = 0,45 - \frac{1}{30} \left(\log \frac{n}{10} + \frac{1}{1 - \nu} \frac{c(c^2 + 1 + \nu)}{(c^2 + 1)^{3/2}} \log \frac{a}{1000\ r_o} \right)$$

L'expression $\frac{c(c^2 + 1 + \nu)}{(c^2 + 1)^{3/2}}$ étant inférieure à 1 quel que soit c, on peut facilement déterminer c dans chaque cas par une méthode d'iteration. On a alors :

$$\frac{2\,\pi\,p}{2\,a} = \pi\, c$$

Ce rapport d'équilibre ne dépend de a et de n que logarithmiquement ; ses variations sont

donc faibles tant que l'on considère des hélices de tailles raisonnables et l'approximation faite en développant W au voisinage de c = 0,45 est justifiée. Quand n et a sont voisins de 10 et 1000 r_o le terme $\frac{1}{30}\left(\log\frac{n}{10} + \frac{1}{1-\nu}\frac{c(c^2+1+\nu)}{(c^2+1)^{3/2}}\log\frac{a}{1000\ r_o}\right)$ devient négligeable devant 0,45 (ce terme est inférieur à 1/100 quand on multiplie le nombre de spires ou le diamètre par deux) on obtient :

$$\frac{2\pi p}{2a} = 1,4 \pm 0,5$$

II.1.3.3 - Cas où les extrémités de l'hélice sont soumises à une force extérieure.

C'est par exemple le cas quand le déplacement des extrémités entraîne une variation d'énergie des autres dislocations du cristal. Quand la force appliquée est petite l'équilibre est donné par :

$$F = -\left(\frac{d^2W}{dL^2}\right)_L \Delta L$$

$L' = 2n\pi a$ et c' étant la longueur d'équilibre de l'hélice pour F = 0.

Pour des valeurs raisonnables de a on peut négliger la variation en fonction de c du terme :

$\frac{c^2+1-\nu}{\sqrt{1+c^2}}\ \mathrm{Log}\frac{a}{1000\ r_o}$. On obtient

$$F = -\frac{15.\ c'}{2\pi}\ \mu b^2\ \frac{\Delta L}{L'}$$

soit, en prenant c' = 0,45 :

$$F \simeq 1,1.\ \mu b^2\ \frac{\Delta L}{L'}$$

L'hélice se comporte comme un ressort du coefficient élastique indépendant de n et ne variant que logarithmiquement en fonction de a.

Pour a égal à 1000 r_o ce coefficient élastique est égal à $1,1\ \mu b^2$.

II.1.3.4 - Application.

Cas où les forces exercées sur les extrémités sont dues à des dislocations faisant un angle θ avec l'axe de l'hélice (figure II.3).

Si $\alpha\ \mu b^2$ est la tension de ligne de la dislocation, $\beta\ \mu b^2$ le coefficient de l'hélice, la position d'équilibre est donnée par :

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\alpha}{\beta}\cos\theta$$

L'approximation c = 0,45 n'est valable que pour les faibles valeurs de $\frac{\Delta L}{L}$, soit pour θ voisin de $\frac{\pi}{2}$.

Cas ou θ est voisin de 0 ou de π.

On ne peut plus utiliser le développement de l'énergie au voisinage de c = 0,45. On calcule la position d'équilibre de l'hélice en utilisant la courbe de la figure (II.1) donnant la variation de W_o en fonction de c.

$\theta \simeq 0$ (figure II.4)

Il n'y a pas de position d'équilibre et le pas de l'hélice tend à augmenter.

$\theta \simeq \pi$ (figure II.5)

Quand le pas diminue l'énergie de répulsion entre spires devient importante, on trouve alors une position d'équilibre. En prenant $\beta = 1$ et $\alpha = \frac{1}{2}$ on trouve :

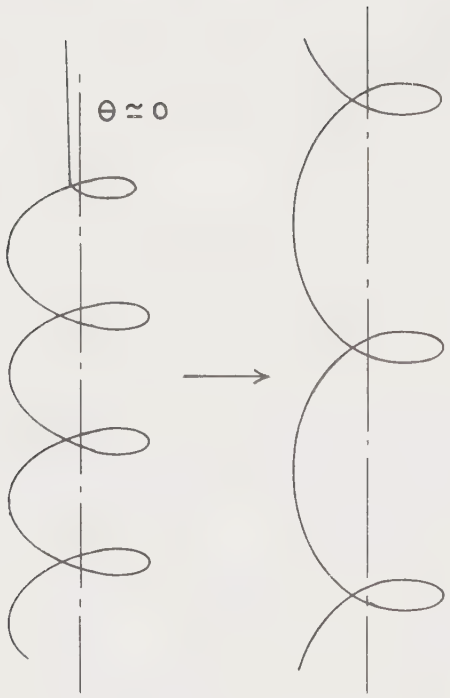


Fig. II.4 - Cas où la force exercée sur les extrémités de l'hélice est due à une dislocation faisant un angle $\theta = 0$ avec l'axe (pas de position d'équilibre).

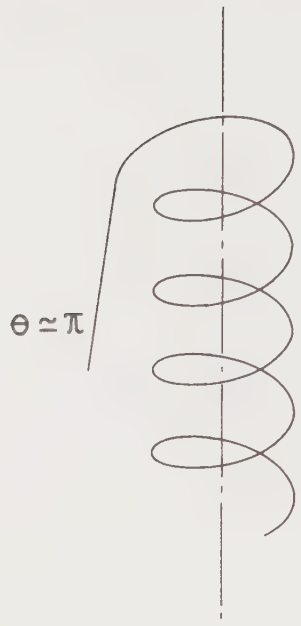


Fig. II.5 - Cas où la force exercée sur les extrémités de l'hélice est due à une dislocation faisant un angle $\theta = \pi$ avec l'axe.

II.1.3.5 - Comparaisons avec les résultats expérimentaux.

Les photos d'hélice obtenues par Amelinckx dans des cristaux ioniques, Dash dans du silicium et Thomas et Whelan dans un alliage Al Cu, ne permettent généralement pas de déterminer la force s'exerçant aux extrémités.

Un certain nombre de configurations correspondant à $\theta = \pi$ (figure II.5) ont cependant été observées (Dash [18]). Dans ce cas le rapport $\frac{2\pi p}{2a}$ est compris entre 0,5 et 1 ce qui est en bon accord avec le rapport calculé.

Un grand nombre d'hélices ont un rapport $\frac{2\pi p}{2a}$ compris entre 1 et 2, ce qui laisse supposer que les forces s'exerçant sur les extrémités sont faibles.

Thomas et Whelan en trempant des échantillons de Al, Cu à partir d'une température assez basse ont obtenu des hélices dont le pas était très grand devant le diamètre, ce qui correspond au cas $\theta = 0$.

II.2 - ACTION D'UNE CONTRAINTE UNIFORME [30].

Nous appliquons une contrainte uniforme à un cristal contenant une dislocation hélicoïdale. Nous déterminons la nouvelle forme d'équilibre prise par la dislocation en glissant sur son cylindre en supposant la tension de ligne τ constante ; nous en déduisons ensuite la limite élastique d'un cristal contenant des hélices. Des contraintes supérieures à $\sigma_c = \frac{\tau}{b\,a}$ détruisent les hélices de rayon a en formant des sources.

II.2.1 - Forme d'équilibre de la dislocation sous contrainte.

Nous supposons que la dislocation peut glisser mais ne peut pas monter. Sous l'action d'une contrainte uniforme, l'hélice va prendre une nouvelle forme d'équilibre.

Le tenseur des contraintes Σ exerce sur la dislocation une force $\underset{\sim}{b}\ \Sigma \wedge \underset{\sim}{t}$. On choisit l'axe Ox parallèle à la direction $\underset{\sim}{b}\ \sigma$, projection du vecteur $\underset{\sim}{b}\ \Sigma$ dans le plan x O y. La composante de glissement de la force est donc :

$$. F = \underset{\sim}{b}\,\Sigma .\ \underset{\sim}{n} = b\,\sigma\,\cos\varphi$$

ou φ est l'angle de la normale $\underset{\sim}{n}$ au plan tangent au cylindre avec Ox. On développe le cylindre suivant son plan tangent. Dans ce plan, les nouveaux axes seront Oz et Ox = a φ, a étant le rayon du cylindre.

Dans ce plan l'équilibre de la dislocation s'écrit :

$$C = \frac{\tau}{F} = \frac{\tau}{b\,\sigma .\cos\varphi}$$

ρ est le rayon de courbure de la dislocation dans le plan. τ est la tension de ligne de la dislocation . Elle a été calculée pour une hélice dans le paragraphe précédent.

En explicitant le rayon de courbure, on obtient :

$$\frac{\frac{d^2z}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{b\,\sigma}{\tau}\cos\frac{x}{a}$$

soit en posant :

$$\frac{\sigma\, b .\ a}{\tau} = C \geqslant 0$$

$$z - z_o = \pm \int_{x_o}^{x} \frac{\left(C \sin\frac{x}{a} + A\right) dX}{\left[1 - \left(C \sin\frac{x}{a} + A\right)^2\right]^{1/2}} \qquad \text{avec } (A \pm C)^2 \leqslant 1$$

A est la constante d'intégration dépendant des conditions aux limites. Elle peut être fonction de C . Changer A en -A revient à changer le sens d'enroulement de la dislocation sur son cylindre. Il suffit donc de faire varier A de 0 à 1 pour obtenir toutes les configurations possibles. La figure II.6 représente ces configurations pour certaines valeurs de A et de C.

Choix des conditions aux limites.

On suppose que l'hélice est fixée à ses extrémités ; le pas de l'hélice reste constant, soit :

$$2\,\pi\,p = \int_o^{2\pi a} \frac{\left(C \sin\frac{x}{a} + A\right) dx}{\left[1 - \left(C \sin\frac{x}{a} + A\right)^2\right]^{1/2}} = \text{cte}..$$

cette relation détermine A en fonction de C, pour une valeur donnée du pas.

Les courbes de la figure II.7 représentent le pas $2\,\pi\,p$ de la courbe en fonction de C pour des valeurs constantes de A. Elles permettent de déterminer la fonction A(C) suivant les conditions aux limites choisies. Quand le pas reste constant A est une fonction décroissante de C.

Pour C = 0 on retrouve une hélice faisant avec son vecteur de Burgers un angle ψ donné par A = cos ψ.

Pour C tendant vers 1, A tend vers 0.

Cas d'une boucle.

Pour A = 0 le pas de la courbe est nul quel que soit C. On obtient donc une boucle. Sous l'effet de la contrainte la forme d'équilibre devient :

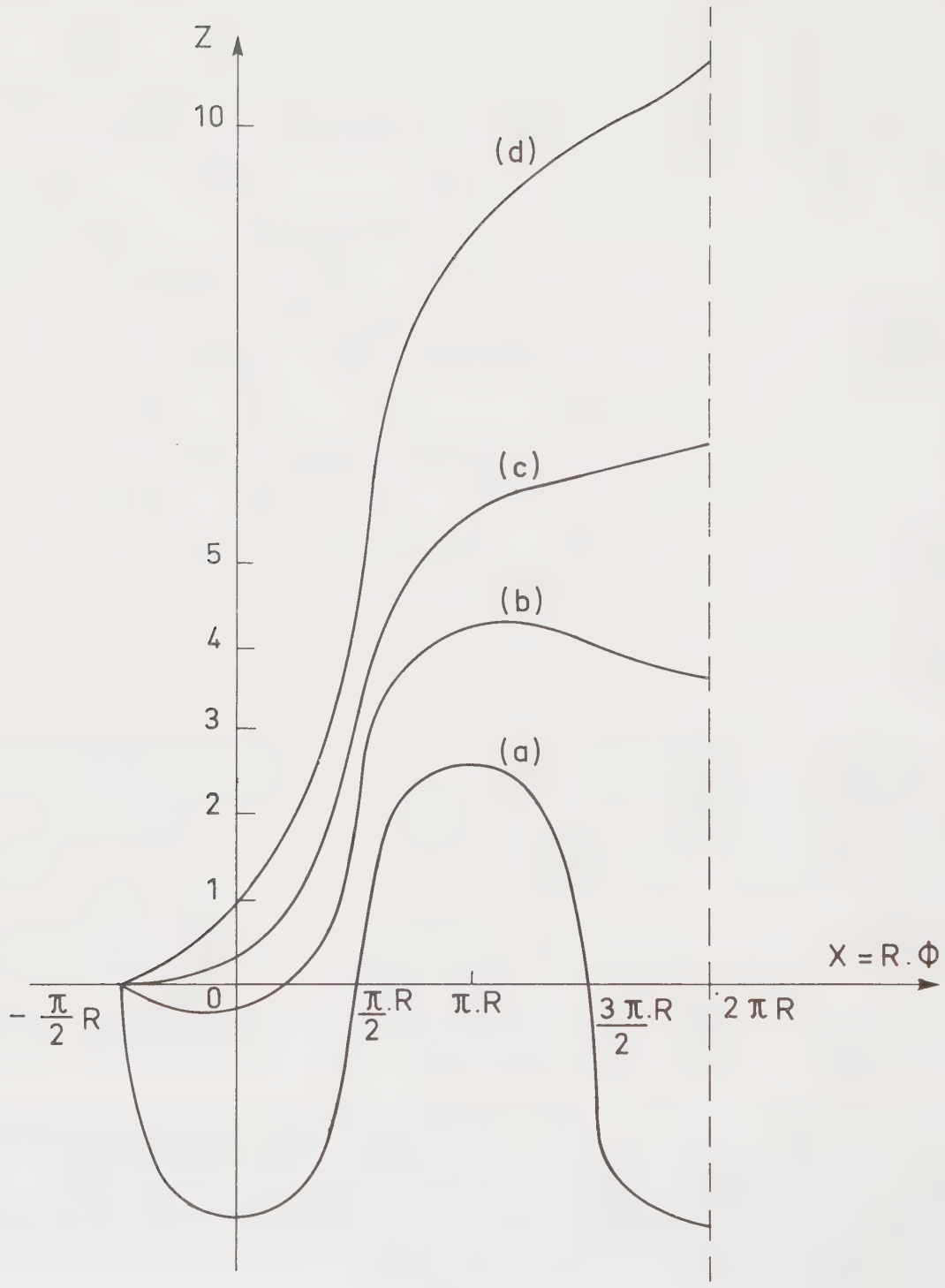


Fig. II.6 - Forme d'équilibre prise par l'hélice sous l'action d'une contrainte sur le cylindre de glissement développé.

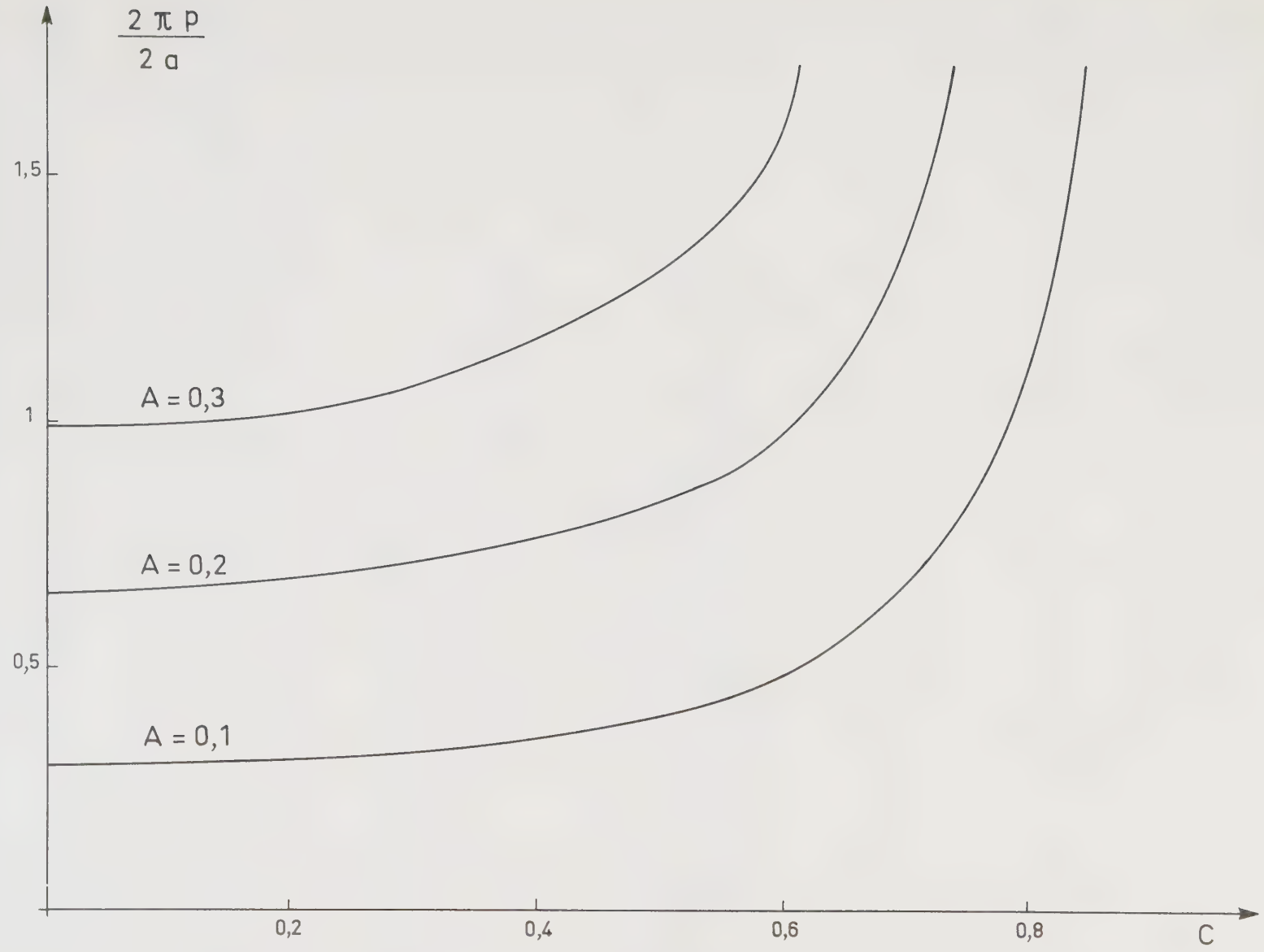


Fig. II.7 - Pas de la dislocation en fonction de $c = \sigma \frac{b\,a}{\tau}$ pour différentes valeurs de la constante d'integration A.

$$Z = \int_{x_0}^{x} \frac{C \sin \frac{x}{a}\, dx}{\left(1 - C^2 \sin^2 \frac{x}{a}\right)^{1/2}}$$

soit :

$$Z = a \operatorname{Argsh}\left[\frac{C}{\sqrt{1 - C^2}} \cos \frac{x}{a} \right]$$

II.2.2 - Formation de sources.

Quand $\frac{dz}{dx}$ devient très grand la dislocation devient pratiquement parallèle à son vecteur de Burgers. $\frac{dz}{dx}$ est maximum pour $x = a \frac{\pi}{2}$. Nous avons alors une dislocation pratiquement vis sur une longueur :

$$L = 2 \left[Z \left(\frac{\pi}{2} a + \frac{b}{2} \right) - Z \left(\frac{\pi}{2} a \right) \right]$$

En développant $\sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{b}{2a} \right)$ et en prenant les premiers termes nous obtenons :

$$L = 2a \sqrt{\frac{C + A}{C}} \operatorname{Arg\,sh} \left[\frac{b}{2a} \sqrt{\frac{C (C + A)}{1 - (C + A)^2}} \right]$$

Ces portions de dislocations vis sont situées dans le plan y O z. Leur plan de glissement étant quelconque, elles peuvent quitter le cylindre de glissement de l'hélice et se courber dans le plan y O z où la composante de glissement de la contrainte $\Sigma \underset{\sim}{b} \wedge \underset{\sim}{t}$ est maximum. Leur forme d'équilibre est alors un arc de cercle. Elles peuvent former des sources analogues aux sources de Frank-Read quand leur longueur est supérieure à [19].

$$L_c = \frac{\tau}{b \sigma} = \frac{a}{C}$$

soit :

$$2a \sqrt{\frac{C + A}{C}} \operatorname{Arg\,sh} \left[\frac{b}{2a} \sqrt{\frac{C (C + A)}{1 - (C + A)^2}} \right] > \frac{a}{C}$$

Cette condition est réalisée pour $A + C = 1$.

Avec les conditions aux limites choisies (pas de l'hélice constant) $A \longrightarrow O$ quand $A + C \longrightarrow 1$. On a donc formation de source pour $C = 1$ soit :

$$\sigma_c = \frac{\tau}{b.\ a} \qquad (II.4)$$

σ_c peut correspondre au crochet de traction obtenu avec les métaux trempés.

F.W. Shapink [13] et H.B.M. Walters ont mesuré cette contrainte dans des "poils" de cuivre trempés, mais n'ont pas déterminé la taille moyenne des boucles de trempe. La formule (II.4) donne un bon ordre de grandeur de la contrainte mesurée en prenant un diamètre moyen de boucle égal à 250 Å.

II.3 - ENERGIE D'INTERACTION ENTRE LES HELICES ET LES DISLOCATIONS DE VECTEURS DE BURGERS OPPOSES.

Dans ce paragraphe, nous calculons l'énergie d'interaction entre une hélice et une dislocation rectiligne de vecteur de Burgers opposé.

La réaction entre une telle dislocation et une hélice conduit à la formation de boucles prismatiques. Ces réactions ont été étudiées et observées par Amelinckx [1] et Dash [18] (figure II.8).

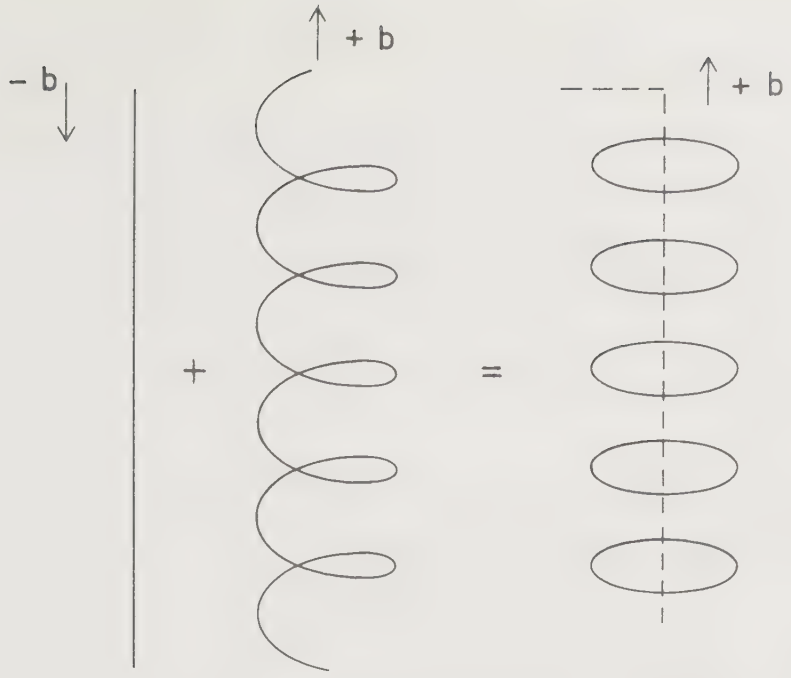


Fig. II.8 - (due à Bontick et Amelinckx) - Formation de boucles prismatiques par réaction d'une hélice avec une dislocation vis de vecteur de Burgers opposé.

Les résultats obtenus dans ce paragraphe sont les suivants :

Quand la dislocation est à l'extérieur de l'hélice, elle est soumise à une force égale à celle qu'exercerait une dislocation vis située suivant l'axe de l'hélice.

Quand elle est à l'intérieur, la force exercée par l'hélice est nulle.

II.3.1 - Interaction avec les dislocations vis.

II.3.1.1 - Energie d'interaction.

L'axe de l'hélice est pris comme axe Oz. L'hélice (c) a pour équation :

$$(c)\quad \begin{aligned} x &= a\cos\varphi \\ y &= a\sin\varphi \\ z &= p\varphi \end{aligned}$$

La dislocation vis :

$$(c')\quad \begin{aligned} x &= d \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Les deux dislocations étant parcourues dans le même sens, leurs vecteurs de Burgers, parallèles à Oz, sont pris égaux et opposés. Leur énergie d'interaction se met sous la forme :

$$W = -\frac{\mu b^2}{4\pi}\oint_c \oint_{c'} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{1-\nu}\cdot\frac{d^2 + a^2 - 2ad\cos\varphi}{R^3}\right] p\, d\varphi\, dz'$$

soit :

$$R^2 = d^2 + a^2 - 2ad\cos\varphi + (p\varphi - z)^2$$

On suppose que les deux dislocations (c) et (c') ont une longueur $2l$ grande devant le pas $2\pi p$ de l'hélice. D'autre part, pour éliminer les effets dus aux extrémités, on calcule l'énergie

d'interaction de la spire située au milieu de l'hélice et on suppose ensuite que chaque spire a même énergie d'interaction. Celle-ci, en posant $p\varphi - z = Z$, se met sous la forme :

$$W = -\frac{\mu b^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} p\, d\varphi \int_0^{l} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{1-\nu} \frac{(d^2 + a^2 - 2ad\cos\varphi)}{R^3} \right] dZ$$

soit après une première intégration :

$$W = -\frac{\mu b^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} p\, d\varphi \left[\text{Log} \frac{l + \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad\cos\varphi + l^2}}{\sqrt{a^2 + d^2 - 2ad\cos\varphi}} - \frac{1}{1-\nu} \frac{l}{\sqrt{d^2 + a^2 + l^2 - 2ad\cos\varphi}} \right]$$

En développant le premier terme en fonction de $\frac{a^2 + d^2}{l^2}$ et en ne gardant que les termes du premier ordre en $\frac{1}{l^2}$ on obtient (annexe 2)

$$W = -\frac{\mu b^2}{2\pi} \left[2\pi p \left(\frac{a^2 + d^2}{4l^2} + \text{Log} \frac{4l}{|a - d| + a + d} \right) - \frac{4pl}{1-\nu} \frac{K(k)}{(d + a)^2 + l^2} \right]$$

K(k) étant l'intégrale elliptique de 2ème espèce d'argument

$$k = \sqrt{\frac{4ad}{(d + a)^2 + l^2}}$$

II.3.1.2 - Force exercée sur la dislocation vis.

En utilisant le développement de la fonction elliptique K(k) l'énergie d'interaction par unité de longueur de dislocation vis se met sous la forme :

$$W = \frac{\mu b^2}{2\pi} \left[\text{Log} \frac{\sup(d, a)}{2l} + \frac{1}{L(1-\nu)} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{a^2 + d^2}{4l^2} \right]$$

En dérivant cette énergie par rapport à la distance à l'axe d nous obtenons la force par unité de longueur exercée sur la dislocation vis.

1er cas $d > a$

La dislocation vis est située à l'extérieur de l'hélice. Nous obtenons :

$$F = -\frac{\mu b^2}{2\pi} \left(\frac{1}{d} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{d}{2l^2} \right)$$

soit en ne gardant que la partie principale :

$$F = -\frac{\mu b^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{d}$$

ce qui correspond à des contraintes internes égales à :

$$\sigma_i = -\frac{\mu b}{2\pi d}$$

Ces contraintes sont identiques à celles qu'exercerait une dislocation vis située suivant l'axe de l'hélice. Si la dislocation vis peut glisser elle est attirée par l'hélice et réagit avec elle en formant des boucles prismatiques (figure II.8).

2ème cas $d < a$

La dislocation vis est située à l'intérieur de l'hélice. Nous obtenons :

$$F = -\frac{\mu b^2}{4\pi} \cdot \frac{(1+\nu)d}{(1-\nu)l^2}$$

Cette force variant en $\frac{d}{l^2}$ est très faible et tend à amener la dislocation vis suivant l'axe de l'hélice.

REMARQUE

Nous avons supposé que ces interactions ne déformaient pas les dislocations. Ceci n'est vrai qu'à grandes distances (à peu près d > 2 a).

Nous avons étudié en annexe (annexe 3) la déformation de l'hélice sur son cylindre produite par la présence de la dislocation vis. Les résultats sont les suivants :

L'angle de l'hélice avec son vecteur de Burgers tend vers zéro dans les parties les plus proches de la dislocation vis et augmente dans les parties les plus éloignées (figure II.6).

Cette déformation entraîne une augmentation de la force d'interaction à courte distance. En particulier la force d'interaction entre une dislocation vis et une boucle prismatique n'est plus nulle après déformation. Une étude de la déformation de la dislocation vis donnerait aussi une augmentation de la force d'interaction à courte distance.

II.3.2 - Cas des dislocations faisant un angle θ avec leur vecteur de Burgers.

II.3.2.1 - Force d'interaction à grande distance.

La force exercée par l'hélice n'est plus constante en moyenne le long de la dislocation. Elle dépend de la distance r à l'axe de l'élément considéré.

Un calcul analogue à celui fait dans le cas d'une dislocation vis nous donne la force par unité de longueur exercée sur chaque partie de la dislocation mobile :

$$F = - \frac{\mu b^2}{2 \pi r} \cos \theta$$

II.3.2.2 - Interactions à courte distance.

Le calcul est alors plus compliqué que dans le cas d'une dislocation vis. Il faudrait aussi tenir compte des déformations. Pour diminuer leur énergie d'interaction les deux dislocations ont tendance, comme dans le cas d'une dislocation vis, à se mettre parallèles dans les parties les plus proches l'une de l'autre.

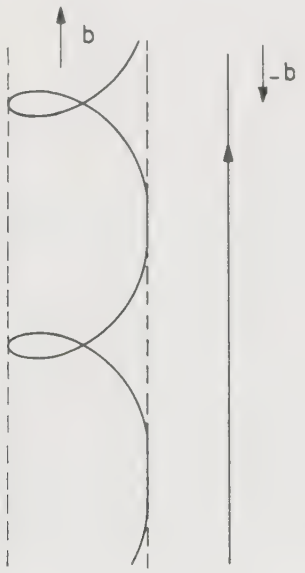


Fig. II.9 --Forme d'équilibre de l'hélice en présence d'une dislocation vis.

CHAPITRE III

ÉQUILIBRE ET STABILITÉ D'UNE DISLOCATION HÉLICOIDALE POUVANT ABSORBER OU EMETTRE DES LACUNES

Dans le chapitre précédent nous avons supposé que les dislocations pouvaient seulement glisser. L'hélice prend alors une forme d'équilibre sur son cylindre de glissement. Nous supposons maintenant qu'en présence d'une sur ou sous saturation de défauts la dislocation peut monter par absorption ou émission de lacunes.

Deux problèmes se posent alors :

a) celui de la stabilité en présence d'une certaine concentration de lacunes en volume.

b) celui de l'évolution de l'hélice hors des conditions de stabilité.

En fait, comme Weertman l'a souligné, l'hélice ne peut avoir qu'une position d'équilibre instable en présence d'une sursaturation fixe de lacunes. Ceci nous amènera, dans les chapitres IV et V à discuter des conditions de germination et de développement des hélices.

Dans le chapitre III, nous reprenons et complétons d'abord la discussion de Weertman sur la stabilité. Pour la commodité de la discussion, nous distinguons la stabilité vis à vis des changements de taille (sans changement de forme) et inversement de forme (sans changement de taille). Cette distinction aura un intérêt physique par la suite car les premiers changements nécessitent une absorption ou une émission de lacunes par diffusion en volume, tandis que les seconds demandent seulement un réarrangement des lacunes par diffusion le long de la dislocation. En général, et surtout à température modérée, la diffusion en volume est beaucoup plus lente que celle le long des dislocations. Lors de sa croissance, discutée chapitre V, on pourra donc admettre que la dislocation garde sa forme d'équilibre.

III.1 - EQUILIBRE ET STABILITE DE LA TAILLE DES HELICES.

III.1.1 - Théorie de Weertman [20,32].

Weertman a montré que sous l'action d'une force chimique dûe par exemple à une sursaturation de lacunes, la forme d'équilibre des dislocations était une hélice.

Si c est la concentration de lacunes dans le cristal, c_o la concentration d'équilibre au voisinage de la dislocation, celle-ci est soumise à une force thermodynamique F_1 par unité de longueur égale à

$$\underset{\sim}{F}_1 = \underset{\sim}{t} \wedge \underset{\sim}{b} \left(\frac{kT}{b^3} \operatorname{Log} \frac{c}{c_o} \right)$$

$\underset{\sim}{t}$ étant un vecteur unitaire tangent à la dislocation.

L'énergie de ligne tend à diminuer la longueur de la dislocation. En utilisant une tension de ligne constante τ la dislocation est soumise à une force F par unité de longueur égale à :

$$\underset{\sim}{F}_2 = \frac{\tau}{R} \underset{\sim}{n}$$

R est le rayon de courbure de la dislocation. Celle-ci est en équilibre quand :

$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{F}_1 + \underset{\sim}{F}_2 = \underset{\sim}{0}$$

ce qui entraîne :

$$\underset{\sim}{n}.\ \underset{\sim}{b} = \frac{d}{ds}(\underset{\sim}{t}.\ \underset{\sim}{b}) = 0$$

soit $\underset{\sim}{t}.\ \underset{\sim}{b}$ = cte ...

La dislocation doit donc faire un angle constant avec un axe Oz parallèle à son vecteur de Burgers $\underset{\sim}{b}$. On en déduit $|F_1|$ = cte, soit encore $|F_2|$ = cte. Le rayon de courbure de la dislocation est donc constant et celle-ci a la forme d'une hélice.

En utilisant les notations relatives aux hélices on obtient :

$$\underset{\sim}{F} = \frac{a}{a^2 + p^2}\left(\tau - \sqrt{a^2 + p^2}.\frac{kT}{b^2}\ \mathrm{Log}\frac{c}{c_o}\right)\underset{\sim}{n} = \underset{\sim}{0} \qquad \text{(III.1)}.$$

En éliminant la solution a = 0 qui correspond à la dislocation vis on obtient la relation suivante entre le pas et le diamètre de l'hélice :

$$\sqrt{a^2 + p^2} = \frac{\tau\, b^2}{kT\ \mathrm{Log}\frac{c}{c_o}}$$

Supposons par exemple l'hélice ancrée à ses extrémités. Le pas $2\pi p$ est constant, $\frac{dF}{da}$ étant négatif quel que soit a, l'hélice est toujours instable en présence d'une sursaturation de défauts. Son diamètre augmente ou diminue suivant le signe de la force $\underset{\sim}{F}$.

Nous pouvons établir cette instabilité de la taille de l'hélice sans faire l'approximation d'une tension de ligne constante en utilisant les calculs d'énergie du chapitre précédent.

III.1.2 - Instabilité d'une hélice ancrée à ses extrémités.

Le pas de l'hélice reste constant. On a donc :

$$c = \frac{p}{a} \text{ et } \frac{dc}{da} = -\frac{c}{a}$$

quand le rayon varie de da, la dislocation absorbe un nombre de lacunes égal à :

$$\frac{2\,n\,\pi\,a}{b^2}\,da\,,$$

et la variation d'énergie libre du cristal contenant une hélice de n spires est donnée par :

$$d\mathcal{F} = \left(\frac{dW}{da} - \frac{2\,n\,\pi\,a}{b^2}\,kT\ \mathrm{Log}\frac{c}{c_o}\right)da \qquad \text{(III.2)}$$

avec :

$$\frac{dW}{da} = \frac{\partial W}{\partial a} - \frac{c}{a}\frac{\partial W}{\partial c}$$

W étant l'énergie d'une hélice de n spires donnée par la formule (II.3).

La position d'équilibre de l'hélice est donné par la relation(*) :

(*) On retrouve la formule de Weertman en prenant maintenant comme tension de ligne :

$$\tau = \frac{\sqrt{a^2 + p^2}}{2\,n\,\pi\,a}\left(\frac{\partial W}{\partial a} - \frac{c}{a}\frac{\partial W}{\partial c}\right)$$

$$\frac{1}{a}\frac{dW}{da} = \frac{2\,n\,\pi}{b^2}\,kT\,\mathrm{Log}\,\frac{c}{c_o}$$

La stabilité dépend du signe de $\frac{d^2\mathcal{F}}{da^2}$ avec :

$$\frac{d^2\mathcal{F}}{da^2} = \frac{d^2W}{da^2} - \frac{2\,n\,\pi}{b^2}\,kT\,\mathrm{Log}\,\frac{c}{c_o}$$

soit, à l'équilibre :

$$\frac{d^2\mathcal{F}}{da^2} = \frac{d^2W}{da^2} - \frac{1}{a}\frac{dW}{da}$$

En utilisant le développement de W au voisinage de la valeur d'équilibre c = 0,45 (II.3) on obtient :

$$\frac{d^2\mathcal{F}}{da^2} = \frac{\mu\,b^2\,n}{a}\left[22,5\,c^2 - 7,26 - \frac{c^2(c^2+1+\nu)}{(1-\nu)(1+c^2)^{3/2}} - \frac{1}{2(1-\nu)}\,\mathrm{Log}\,\frac{a}{a_o}\left(\frac{c^4(1-2\nu)+c^2(1-\nu)-2}{(1+c^2)^{5/2}}\right)\right]$$

$\frac{d^2\mathcal{F}}{da^2}$ est négatif pour les valeurs de c raisonnables voisines de 0,45. L'hélice est donc instable ce qui confirme les résultats obtenus par Weertman avec une tension de ligne constante(*).

III.1.3 - Instabilité d'une hélice dont les extrémités sont libres.

On suppose qu'aucune force ne s'exerce sur les extrémités et que celles-ci peuvent se déplacer parallèlement à l'axe de l'hélice. Celle-ci peut alors glisser sur son cylindre de façon à minimiser son énergie ; le rapport $\frac{p}{a}$ reste constant et égal à 0,45. On a alors :

$$\frac{dc}{da} = 0$$

L'équilibre de l'hélice est donné par(**) :

$$\frac{2\,n\,\pi}{b^2}\,kT\,\mathrm{Log}\,\frac{c}{c_o} = \frac{1}{a}\frac{\partial W}{\partial a}$$

La stabilité dépend du signe de :

$$\frac{d^2\mathcal{F}}{da^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial a^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial W}{\partial a}$$

En utilisant l'expression de W calculée au chapitre précédent (II.3) on obtient :

$$\frac{d^2\mathcal{F}}{da^2} = -\frac{W}{a^2}$$

L'hélice est donc également instable quand ses extrémités sont libres.

(*) Pour les valeurs de c très différentes de 0,45 le développement de W utilisé n'est pas valable. Il faudrait connaître avec précision la courbure de W pour pouvoir étudier la stabilité de l'hélice dans ce domaine.

(**) Ce qui correspond à une tension de ligne :

$$\tau = \frac{\sqrt{a^2+p^2}}{2\,n\,\pi\,a}\cdot\frac{\partial W}{\partial a}$$

III.1.4 - Conclusions.

En présence d'une sursaturation de lacunes constantes, les dislocations hélicoidales sont toujours instables. On peut en déduire les conséquences suivantes :

a) Les hélices de taille inférieure à la taille d'équilibre ont tendance à disparaître. Il y a donc un problème de germination qui fait l'objet du chapitre IV.

b) Les hélices, une fois atteinte la taille d'équilibre, vont croître spontanément. Nous étudions leur évolution dans le chapitre V. Pour faciliter cette étude, nous essayons de calculer dans la suite de ce chapitre (III.2), les variations d'énergie qu'entraînent de petites déformations de l'hélice pour en déduire la stabilité de la forme hélicoidale.

III.2 - EQUILIBRE ET STABILITE DE LA FORME HELICOIDALE [31].

Nous supposons maintenant que la diffusion des lacunes en volume est négligeable devant la diffusion le long de la dislocation. Le nombre de lacunes absorbées, égal à $\frac{n \pi a^2}{b^2}$, reste alors constant. L'hélice est supposée ancrée à ses extrémités : sa longueur reste constante.

A ces conditions correspond un certain nombre d'hélices possibles telles que :

$$n_1 a_1^2 = n_2 a_2^2 = \ldots = n_p a_p^2.$$

Les calculs de De Wit montrent que l'énergie est une fonction décroissante du nombre de spires. La forme hélicoïdale la plus stable correspond à l'hélice ne comprenant qu'une seule spire de grand diamètre. Mais la dislocation ne peut passer de façon continue d'une de ces solutions à une autre en conservant sa forme hélicoïdale. Afin d'étudier les possibilités d'équilibre métastable pour des hélices de plusieurs spires, nous allons étudier les variations d'énergie qu'entraînent des déformations de faible amplitude par rapport à la forme hélicoïdale.

III.2.1 - Présentation du calcul.

On utilise des déformations sinusoidales de longueurs d'onde quelconques (fig. III.1) et laissant le nombre de lacunes absorbées constant :

L'hélice $\begin{cases} r = a \\ z = p\varphi \end{cases}$ a pour équation après déformation : $\begin{cases} r = \alpha + e \sin k\varphi \\ z = p\varphi \end{cases}$

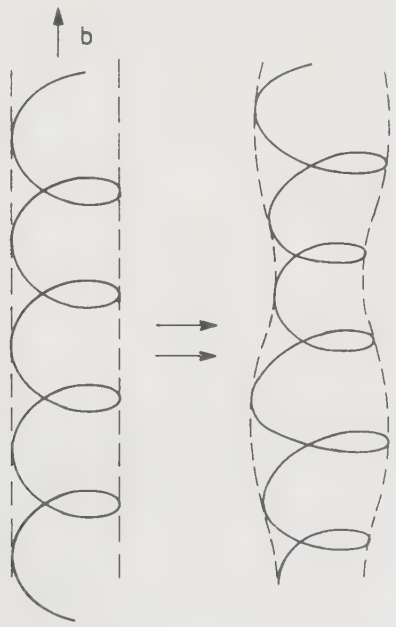


Fig. III.1 - Déformation sinusoïdale de l'hélice.

La conservation du nombre de lacunes absorbées impose :

$$\int_{-\frac{l}{2p}}^{\frac{l}{2p}} a^2 \, d\varphi = \int_{-\frac{l}{2p}}^{\frac{l}{2p}} (\alpha + e \sin k\varphi)^2 \, d\varphi$$

Cette relation permet de déterminer α et impose des restrictions sur les valeurs possibles de k soit :

$$\left| \begin{array}{l} r = a + e \sin k\varphi - \dfrac{e^2}{4a} \\ z = p\varphi \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} k = m. \dfrac{2\pi p}{l} \\ m \text{ entier} \end{array}$$

Les oscillations envisagées sont d'amplitude infiniment petite e. La formule (I.1) permet de calculer la variation d'énergie. En négligeant les termes du 3ème ordre celle-ci se met sous la forme :

$$W = \frac{\mu b^2}{8\pi(1-\nu)} \int_{-\frac{l}{2p}}^{\frac{l}{2p}} d\varphi' \oint_c \left| e E_1(\varphi, \varphi') + e^2 E_2(\varphi, \varphi') \right| d\varphi$$

Pour éliminer l'influence des extrémités nous étudions l'équilibre et la stabilité de la partie centrale de longueur l d'une hélice de longueur $L \gg l$.

L'intégration sur φ peut être remplacée par une intégration sur $\Phi = \varphi - \varphi'$. Dans les nouvelles bornes d'intégration on peut négliger $p\varphi' < l$ devant L. On obtient alors :

$$W = \frac{\mu b^2}{8\pi(1-\nu)} \int_{-\frac{l}{2p}}^{\frac{l}{2p}} d\varphi' \int_{-\frac{L}{2p}}^{\frac{L}{2p}} \left| e E.(\Phi, \varphi') + e^2 E_2(\Phi, \varphi') \right| d\Phi \qquad \text{(III.2)}$$

III.2.2 - Equilibre de l'hélice.

La forme de la dislocation est une forme d'équilibre quand les variations d'énergie entraînées par les déformations sont nulles au premier ordre (formule III.2).

Pour simplifier l'écriture nous utilisons les notations suivantes :

$$\mathcal{A}. f(r) = \left| \frac{\partial}{\partial r} f(r) \right|_{r=a}$$

$$\mathcal{A}'. f(r') = \left| \frac{\partial}{\partial r}. f(r') \right|_{r=a}$$

$$\mathcal{R}. f(p) = \left| 1 - p \frac{\partial}{\partial p} \right| f(p)$$

E_1 se met alors sous la forme :

$$E_1 = -(1+\nu) p^2 (\mathcal{A} \sin k\varphi + \mathcal{A}' \sin k\varphi'). \frac{1}{R} + (aa' \cos\Phi + p^2)(\mathcal{A} \sin k\varphi + \mathcal{A}' \sin k\varphi'). \frac{1}{R}$$

$$+ k \sin\Phi (a' \cos k\varphi - a \cos k\varphi'). \mathcal{R}. \frac{1}{R} + \cos\Phi (a' \sin k\varphi + a \sin k\varphi'). \mathcal{R}. \frac{1}{R}.$$

La variation d'énergie au premier ordre s'exprime donc à l'aide d'intégrales de la forme :

$$\frac{\mu b^2}{8\pi(1-\nu)} \int_{-\frac{l}{2p}}^{\frac{l}{2p}} \sin k\varphi'. \, d\varphi' \int_{-\frac{L}{2p}}^{\frac{L}{2p}} f(\Phi) \, d\Phi$$

avec $f(\Phi)$ indépendant de φ'. Comme $k = m \dfrac{2\pi p}{l}$ toutes les intégrales sur φ' sont nulles.

La variation d'énergie entraînée par les oscillations est nulle au premier ordre. L'hélice est

donc une position d'équilibre pour la dislocation, quel que soit le diamètre et le nombre de spires.

Pour étudier la stabilité de cet équilibre, il est nécessaire d'étudier les variations d'énergie dues aux termes du 2ème ordre.

III.2.3 - Stabilité de l'hélice.

La stabilité dépend du signe des termes du 2ème ordre (formule III.2). E_2 se met sous la forme :

$$E_2 = -(1+\nu)\,p^2.\,(\alpha^2 \sin^2 k\varphi + \alpha'^2 \sin^2 k\varphi' + 2\,\alpha\alpha' \sin k\varphi \sin k\varphi'.)\frac{1}{R_o}$$

$$+ (aa' \cos\Phi + p^2)\,(\alpha \sin k\varphi + \alpha' \sin k\varphi')^2.\,\mathcal{R}.\,\frac{1}{R_o}$$

$$+ \left| k^2 \cos\Phi.\,\cos k\varphi.\,\cos k\varphi' + k \sin\Phi.\,(\sin k\varphi'.\,\cos k\varphi - \sin k\varphi \cos k\varphi')\right.$$

$$\left. + \cos\Phi.\,\sin k\varphi.\,\sin k\varphi' \right| \mathcal{R}.\,\frac{1}{R_o} + \left| k \sin\Phi\,(a' \cos k\varphi - a \cos k\varphi')\right.$$

$$\left. + \cos\Phi.\,(a' \sin k\varphi + a \sin k\varphi')\,(\sin k\varphi + \sin k\varphi') \right| \mathcal{R}.\,\frac{1}{R_o} + (1+\nu)\,p^2 \left(\frac{\alpha}{4a} + \frac{\alpha'}{4a}\right).\frac{1}{R_o}$$

$$- (aa' \cos\Phi + p^2) \left(\frac{\alpha}{4a} + \frac{\alpha'}{4a'}\right) \mathcal{R}.\,\frac{1}{R_o} - \cos\Phi \left(\frac{a'}{4a} + \frac{a}{4a'}\right) \mathcal{R}.\,\frac{1}{R_o}$$

avec $\varphi = \Phi + \varphi$.

Dans l'expression :

$$\Delta W = \frac{\mu b^2}{8\pi(1-\nu)} \int_{-\frac{l}{2p}}^{\frac{l}{2p}} d\varphi' \int_{-\frac{L}{2p}}^{\frac{L}{2p}} E_2\,\varphi \qquad \text{(III.3)}$$

on peut intervertir l'ordre des intégrations sur Φ et φ' et des dérivations α, α' et $\mathcal{R}$. ΔW peut alors s'exprimer en fonction de S(k) (annexe 4), avec :

$$S(k) = \int_{-\frac{L}{2p}}^{\frac{L}{2p}} \frac{\cos k\Phi}{R}\,d\Phi.$$

Les intégrales S(0) et S(1) ont été calculées par De Wit. On calcule d'une façon analogue S(k) (annexe 5). On obtient :

$$S(k) = \varepsilon_n.\,\frac{2}{p} \sum_{o}^{\infty} \left| I_n\left(|n+k|\frac{a}{p}\right) K_n\left(|n+k|\frac{a'}{p}\right) + I_n\left(|n-k|\frac{a}{p}\right) K_n\left(|n-k|\frac{a'}{p}\right)\right|$$

avec :

$$\varepsilon_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

I_n et K_n sont les fonctions de Bessel modifiées de troisième et seconde espèces.

L'expression de ΔW (III.3) peut être explicitée d'une façon assez simple dans les deux cas suivants : $a \ll p$ et $a \gg p$. Dans les autres cas le développement en $\frac{a}{p}$ ou $\frac{p}{a}$ devient rapidement très compliqué.

a) Cas où $p \gg a$.

La partie principale de la variation d'énergie se met sous la forme :

$$\Delta W = \frac{\mu\, b^2}{8\,\pi(1-\nu)}\,\frac{l\, e^2}{2\,p}\left|-(1+\nu)\,p^2\right|\left(\alpha^2+\alpha'^2\right).\ S(0)+2.\ \alpha\alpha'\ S'k)\right|$$

$$+\,p^2.\ \mathcal{R}\,(\alpha^2+\alpha'^2).\ S(0)+2\,\alpha\alpha'.\ S(k)\Big|+(1+\nu)\frac{p^2}{2}.\left(\frac{\alpha'}{a}+\frac{\alpha'}{a'}\right).\ S(0)$$

$$-\frac{p^2}{2}\left(\frac{\alpha^2}{a}+\frac{\alpha'}{a}\right).\ S(0)+\frac{1+k^2}{2}\,\mathcal{R}.\ \left|S(1+k)+S(1-k)\right|-k\,\mathcal{R}.\left|S(1-k)-S(1+k)\right|\Big|$$

on utilise le développement de $I_n(x)$ et $K_n(x)$ pour les petites valeurs de x pour expliciter S(0), S(k) et $S(1 \pm k)$. (Annexe 6). On obtient alors :

$$\Delta W = \frac{\mu\, b^2}{16\,\pi(1-\nu)}\cdot\frac{l\, e^2}{p^2}.\ (7+4\,k^2-\nu)\ \mathrm{Log}\ \frac{2\,p}{r_o} > 0$$

quand le pas est très grand devant le diamètre l'hélice représente donc une position d'équilibre métastable pour la dislocation.

b) Cas où a >> p.

La partie principale de ΔW (III.3) se met sous la forme :

$$\Delta W = \frac{\mu\, b^2}{8\,\pi(1-\nu)}\,\frac{l\, e^2}{2\,p}\Big|aa'\ (\alpha^2+\alpha^2).\ S(1)+\frac{1}{2}\,(a'\,\alpha+a\,\alpha').\ \mathcal{R}.\ S(1)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a}+\frac{a}{a'}\right)\ \mathcal{R}.\ S(1)+\left(aa'\,\alpha\alpha'+\frac{1+k^2}{2}+\frac{a}{2}\,\alpha+\frac{a'}{2}.\ \alpha'\right).\ \mathcal{R}.\ (S(1+k)+S(1-k))\Big|$$

on utilise les formes asymptotiques de $I_n(x)$ et $K_n(x)$ quand $x \longrightarrow \infty$ pour expliciter S(1) et S(1 + k) (annexe 6).

La variation d'énergie se met alors sous la forme :

$$\Delta W = \frac{\mu\, b^2}{8\,\pi(1-\nu)}\,\frac{l\, e^2}{p}\left|\frac{2}{p}\,\frac{a}{a'}-(1-4\,k^2)\,\frac{1}{\sqrt{aa'}}\ \mathrm{Log}\ \frac{p}{e\, r_o}+(a\,\alpha+a'\,\alpha'+2\,aa'\,\alpha\,\alpha+1+k^2)\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{2}{p}\ I\ \left(\frac{k\,a}{p}\right)\ K_1\left(\frac{k\,a'}{p}\right)\right)\right|$$

L'expression ne se simplifie que dans le cas des oscillations de courtes et de grandes longueurs d'onde.

Cas où $k >> \frac{p}{a}$.

Les oscillations ont alors des longueurs d'onde $\frac{2\,\pi\,p}{k}$ inférieures à $2\,\pi\,a$. On obtient alors (annexe 6) :

$$\Delta W = \frac{\mu\, b^2}{4\,\pi(1-\nu)}\,\frac{l\, e^2}{p^2}$$

La variation d'énergie est positive. L'hélice est donc une position d'équilibre métastable par rapport aux déformations de faibles longueurs d'onde.

Cas où $k << \frac{p}{a}$.

Les oscillations ont des longueurs d'onde grandes devant $2\,\pi\,a$. On obtient (annexe 6) :

$$\Delta W = -\frac{\mu\, b^2}{8\,\pi(1-\nu)}\,(1-4\,k^2).\,\frac{l\, e^2}{p.\ a}\,\mathrm{Log}\,\frac{a'}{r_o\, e}$$

La variation d'énergie est négative. La position d'équilibre est instable.

III.2.4 - Résultats.

Nous avons supposé que l'hélice était fixée à ses extrémités et que le nombre de lacunes absorbées était constant. Dans ces conditions nous avons obtenu les résultats suivants :

- quand le pas est grand devant le diamètre, l'hélice est une forme d'équilibre métastable, Pour diminuer son nombre de spires il lui faut franchir une barrière d'énergie.

- quand le pas est petit devant le diamètre l'hélice est une position d'équilibre instable.

Les calculs n'ont été faits que dans les cas limites en utilisant les parties principales des développements en $\frac{a}{p}$ et $\frac{p}{a}$. Ils ne nous ont pas permis de déterminer la valeur du rapport $\frac{a}{p}$ pour laquelle l'hélice passe d'une configuration métastable à une configuration instable.

CHAPITRE IV

GERMINATION DES HÉLICES

Nous avons vu que, pour une sursaturation donnée de lacunes, il existe un rayon de courbure critique d'équilibre instable pour l'hélice : toute hélice de rayon de courbure plus petit tend à disparaître. Ceci pose le problème de la germination des hélices.

Nous présentons et analysons les modèles proposés par Amelinckx pour les dislocations partiellement coins (IV.1) et par Weertman pour les dislocations vis (IV.2). Nous complétons le modèle de Weertman en analysant les conditions de germination (IV.3).

IV.1 - MODELE D'AMELINCKX [1], BONTINCK, DEKEYSER ET SEITZ POUR LES DISLOCATIONS PARTIELLEMENT COINS.

IV.1.1 - Présentation du modèle.

Ce modèle est une extension du mécanisme de montée proposé par Bardeen et Herring. La source de Bardeen-Herring est formée par un segment de dislocation coin ancré en deux points . Sous l'action de la force due à la sursaturation de lacunes :

$$\underset{\sim}{F}_1 = \underset{\sim}{t} \wedge \underset{\sim}{b} \left(\frac{kT}{b^3} \operatorname{Log} \frac{c_o}{c} \right)$$

la dislocation se déplace dans son plan de montée et prend les formes successives d'une source de Frank Read fig. IV.1.

Fig. IV.1 - Source de Bardeen - Herring (d'après Bardeen et Herring).

Si la forme $\underset{\sim}{F}_1$ est suffisante pour amener la dislocation suivant la position d'un demi-cercle (fig. IV.1) la dislocation devient instable et on a formation de boucles prismatiques.

Pour une dislocation partiellement coin, les points d'ancrage ne sont pas dans le même plan de montée ; on a une source analogue aux sources de Frank-Read spirales. La dislocation prend alors, suivant Amelinckx, les formes décrites par la figure IV.2.

IV.1.2 - Critique du modèle.

On peut faire à ce modèle deux critiques importantes :

a) Le mécanisme proposé ne conduit pas à la formation d'hélices mais de spirales.

b) Le modèle suppose une diffusion très rapide des lacunes en volume, permettant de maintenir la sursaturation au voisinage des dislocations lors de la croissance ; il néglige la redistribution des lacunes par diffusion le long des dislocations.

Il est plus vraisemblable d'admettre qu'assez rapidement la sursaturation en volume est localement épuisée près des dislocations, par suite de la diffusion assez lente en volume et du grand nombre de crans.

Si c_o est la concentration d'équilibre en présence d'une dislocation coin rectiligne, la concentration au voisinage d'une spire de rayon de courbure ρ est alors donnée par :

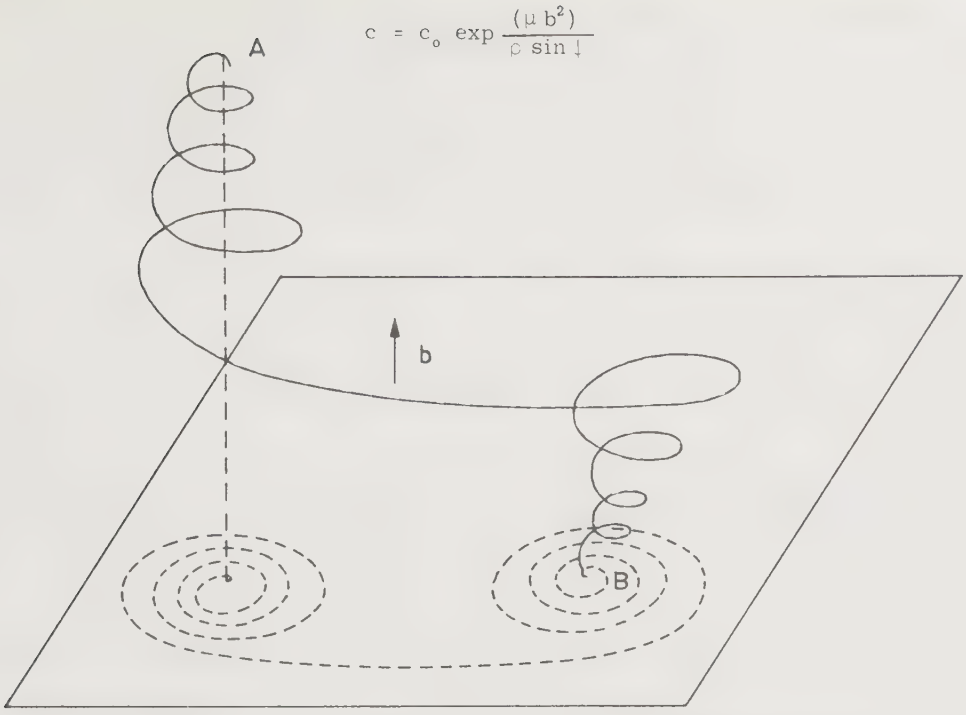


Fig. IV.2 - Source de Bardeen - Herring spirale (d'après Amelinckx).

On a donc un gradient de concentration le long des dislocations spirales. En diffusant le long de la dislocation des petites spires vers les grandes, les lacunes augmentent le caractère spiral de la dislocation(*). Si la diffusion le long de la dislocation est plus importante que la diffusion en volume, les petites spires déjà formées au voisinage des points d'ancrage doivent même disparaître. Avec ces hypothèses, une dislocation ancrée en deux points devrait finalement monter en ne formant qu'une seule spire.

IV.2 - MODELE DE WEERTMAN [2] ET [32] MITCHELL POUR LES DISLOCATIONS VIS.

IV.2.1 - Présentation du modèle.

Pour une dislocation vis, le modèle précédent ne s'applique pas. En effet, nous avons vu dans le deuxième chapitre que la force s'exerçant sur une hélice de diamètre 2 a et de pas 2 π p se met sous la forme :

$$\underset{\sim}{F} = \frac{a}{a^2 + p^2} \left(\tau - \sqrt{a^2 + p^2}. \frac{kT}{b^2} \operatorname{Log} \frac{c}{c_o} \right) \underset{\sim}{n}$$

où τ est la tension de ligne, prise constante par Weertman et Mitchell.

Si on fait tendre le diamètre 2 a vers zéro la dislocation devient rectiligne et la force tend vers zéro. La dislocation vis est donc en position d'équilibre.

La stabilité de cette position dépend de la variation de la force au voisinage de a = 0. En prenant le premier terme du développement de F en fonction de a et en posant :

$$p_m = \frac{\tau b^2}{kT \log \frac{c}{c_o}} \quad \text{on obtient :}$$

$$\underset{\sim}{F} = \frac{a\ kT}{p^2\ b^2} \operatorname{Log} \frac{c}{c_o} (p_m - p)\ \underset{\sim}{n}$$

(*) On peut aussi dire que pour un nombre de lacunes absorbées donné et des extrémités fixes l'énergie de l'hélice (annexe 7) est d'autant plus faible que le nombre de spires est petit.

Pour $p < p_m$ cette force ramène la dislocation à sa position d'équilibre.

Pour $p > p_m$ elle tend au contraire à augmenter le diamètre 2 a de l'hélice.

La dislocation vis est donc instable et peut se transformer en hélice de pas supérieur à $2\pi p_m$. Cette valeur doit donner, d'après Weertman, l'ordre de grandeur du pas des hélices. Mitchell a supposé par la suite que le pas de l'hélice devait correspondre à la force maximum pouvant s'exercer sur la dislocation. Celle-ci, donnée par $\frac{dF}{dp} = 0$, correspond à une hélice de pas :

$$2\pi p = 4\pi p_m$$

IV.2.2 - Critiques du modèle.

Cette discussion montre qu'en présence d'une sursaturation de lacunes les dislocations vis ne sont pas stables vis à vis des déformations hélicoïdales de pas suffisant. Elle est cependant incomplète :

a) Comme la théorie précédente, elle suppose une diffusion en volume rapide et néglige la diffusion le long de la dislocation. Cette hypothèse est cependant moins génante ici, du fait qu'elle porte seulement sur la phase initiale de germination : il suffit que les quelques lacunes nécessaires pour nucléer les spires diffusent du volume du cristal vers la dislocation plus vite que d'une spire à l'autre le long de la dislocation. Les spires, une fois formées, se développeront sans changer de nombre si on peut négliger les effets de bout (extrémités fixes ou hélices longues).

b) Dans cette phase initiale, la vitesse de montée ne dépend pas seulement de la force appliquée mais du nombre de crans [19] le long de la dislocation. Comme les dislocations vis n'en possèdent pas le problème de leur germination peut être important.

c) Il n'est pas évident que la forme hélicoïdale soit la plus probable au départ. En particulier, s'il y a difficulté de germination, il est peu probable que toutes les spires soient nuclées en même temps.

Il est clair que ces critiques seront spécialement valables pour les dislocations dissociées. Dans le paragraphe suivant nous analysons comment les conditions de germination des crans règlent les conditions d'apparition des hélices dans les structures cubiques à faces centrées.

IV.3 - GERMINATION DES SPIRES D'HELICES DANS LES STRUCTURES A DISLOCATIONS DISSOCIEES.

IV.3.1 - Présentation du modèle.

L'étude des modèles proposés antérieurement nous a permis de montrer que les hélices d'une seule spire étaient les plus stables et que si les lacunes diffusent rapidement le long des dislocations, le nombre de spires ne pouvait pas augmenter pendant la croissance. On en déduit que dès leur formation les hélices doivent posséder leur nombre de spires maximum et que leur métastabilité est due au processus de germination.

Le modèle que nous proposons est le suivant :

Dans les structures à dislocations dissociées, les dislocations possèdent très peu de crans à l'équilibre thermique. Les défauts ponctuels isolés (lacunes ou interstitiels) précipitant sur les dislocations vis ou presque vis(*) ne sont pas absorbés. Les lacunes, en diffusant le long de la dislocation, forment alors des défauts plus importants (bi, trilacunes ... etc) qui lorsqu'ils sont formés de plus de deux ou trois lacunes deviennent immobiles. A partir d'une certaine taille (5 à 10 lacunes) ces amas peuvent soit se transformer en boucles de trempe qui, en réagissant avec la dislocation vis, forment des spires d'hélices, soit former directement des spires d'hélices de dimensions atomiques qui prennent ensuite leur forme d'équilibre. Ces deux processus nécessitent une forte sursaturation de lacunes. Dans le premier la sursaturation doit être suffisante pour que les boucles de trempe de taille atomique puissent se développer soit [24] :

$$\frac{c}{c_o} > \frac{1}{kT} \frac{\mu b^4}{2\pi K a} \operatorname{Log} \frac{2a}{r_o}$$

(*) Le modèle s'applique aux dislocations presque vis ne possédant que très peu de crans, tant que le nombre de lacunes absorbées par ces crans est négligeable devant le nombre de lacunes arrivant sur la dislocation.

a étant le rayon de la boucle. Dans le second cas, il faut que les hélices de pas égal à quelques distances interatomiques puissent se développer soit [20] :

$$\frac{c}{c_o} > \frac{1}{kT} \frac{\mu b^4}{2\pi K \sqrt{a^2 + p^2}} \text{Log} \frac{2\sqrt{a^2 + p^2}}{r_o} \quad \text{avec } p \simeq 1$$

La sursaturation nécessaire est alors du même ordre de grandeur que pour les boucles de trempe mais un peu plus faible.

Dans le paragraphe suivant nous étudions les configurations obtenues après transformation des amas. Les deux processus conduisant aux mêmes résultats nous avons supposé, pour faciliter notre étude, qu'il se formait des boucles de trempe qui réagissaient avec la dislocation vis (1er processus).

IV.3.2 - Réaction entre les boucles de trempe et les dislocations vis ou presque vis dans un système C.F.C.

Nous utilisons les notations introduites par Thompson pour décrire les vecteurs de Burgers de ce système. La figure IV.3 représente le tétraèdre de référence. Le tableau [25] (IV.1) (dû à Whelan 1959) donne les carrés des vecteurs de Burgers, proportionnels à l'énergie des dislocations.

TABLEAU IV.1
(d'après Whelan)

vecteur de Burgers	b	b^2	type de dislocation
B	1	1	non dissociée
δC	$1/\sqrt{3}$	1/3	Shockley
δD	$\sqrt{2/3}$	2/3	Frank
$\delta\alpha = \delta C + C\gamma$	1/3	1/9	"stair-rod" angle aigu
$\frac{\delta\alpha}{CB} = \delta C + \alpha B$	$\sqrt{2/3}$	2/9	"stair-rod" angle obtus
$\frac{\delta D}{C\gamma} = \delta C + D\gamma$	2/3	4/9	"stair-rod" angle aigu
$\frac{\delta\alpha}{CD} = \delta C + \alpha D$	$\sqrt{5/3}$	5/9	"stair-rod" angle obtus

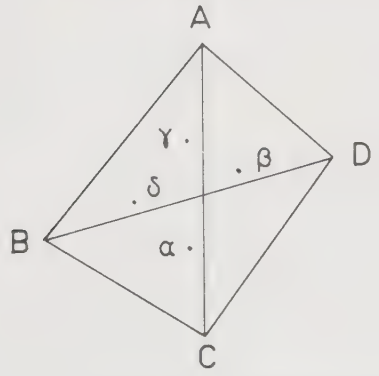


Fig. IV.3 - Tétraèdre de Thompson utilisé.

On suppose que les amas de 5 à 10 lacunes distribués le long de la dislocation se transforment en boucles de trempe. Ces boucles sont parfaites dans les cristaux à forte énergie de faute ($\gamma > 50$ ergs/cm^2) et imparfaites (boucles de Frank) pour les faibles valeurs de γ ($\gamma < 50$ ergs/cm^2).

On suppose que la dislocation vis de vecteur de Burgers $\underset{\sim}{AB}$ est toujours dissociée en deux partielles suivant la réaction $\underset{\sim}{AB} \longrightarrow \underset{\sim}{A\delta} + \underset{\sim}{\delta B}$. La distance entre ces partielle est égale à $d = \frac{\mu b_2}{2\pi K \gamma}$.

On n'envisage que les réactions conduisant à la formation d'hélices. Les boucles de trempe étudiées ont donc même vecteur de Burgers (AB) que la dislocation vis, ou dans le cas de boucles imparfaites, un vecteur de Burgers n'en différant que par l'addition d'un vecteur de Schockley (soit $A\alpha$ ou $B\beta$).

IV.3.2.1 - Cas des cristaux à forte énergie de faute. (boucles de trempe parfaites)

On peut envisager deux types de réaction conduisant à la formation de spires d'hélices.

Réaction avec pincement.

Les deux partielles de vecteurs de Burgers $A\delta$ et δB se recombinent sur une certaine longueur pour réagir avec la boucle (fig. IV.4). Cette réaction est facilitée par la forme d'équilibre prise par la boucle (annexe 3). Ce mécanisme nécessite une énergie d'activation (énergie de pincement et de recombinaison) qui est très élevée pour les métaux à faible énergie de faute ($\simeq$ 5 eV pour le cuivre).

Réaction sans pincement.

La boucle parfaite de vecteur de Burgers AB peut réagir avec une seule des dislocations de Shockley (fig. IV.5) soit :

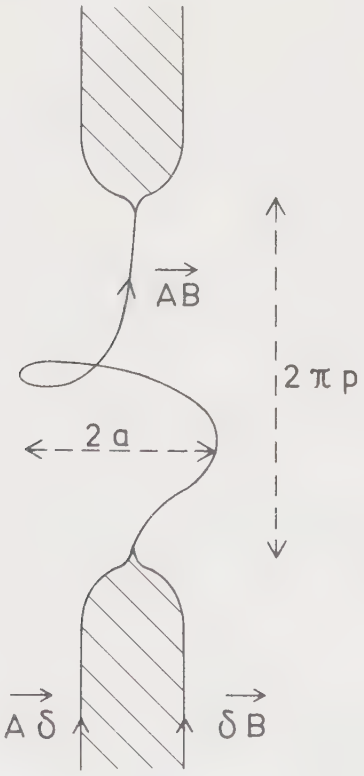


Fig. IV.4 - Spire d'hélice nuclée sur une dislocation vis dissociée.

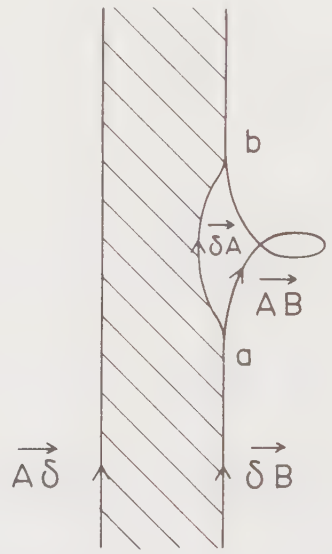


Fig. IV.5 - Réaction d'une boucle parfaite avec une dislocation partielle (Shockley).

$$\underset{\sim}{A}\delta - \underset{\sim}{A}B \longrightarrow B\delta$$

$$\left(\text{Energie} \quad \alpha \quad \frac{1}{3} + 1 \qquad \frac{1}{3}\right)$$

ou

$$\underset{\sim}{\delta}B - \underset{\sim}{A}B \longrightarrow \delta A$$

$$\left(\text{Energie} \quad \alpha \quad \frac{1}{3} + 1 \qquad \frac{1}{3}\right)$$

La longueur ab de la nouvelle dislocation de Shockley formée dépend de la taille de la boucle

de trempe, c'est-à-dire du nombre de lacunes absorbées. Cette dislocation de Shockley a, dans les deux cas, un vecteur de Burgers opposé à la dislocation de Shockley limitant l'autre bord de faute. On a donc attraction entre ces deux dislocations et réaction quand la longueur ab est suffisamment grande. On a alors formation d'une spire d'hélice (fig. IV.6) comme dans le cas d'une réaction avec pincement. Ce modèle présente l'avantage de ne pas nécessiter d'énergie d'activation .

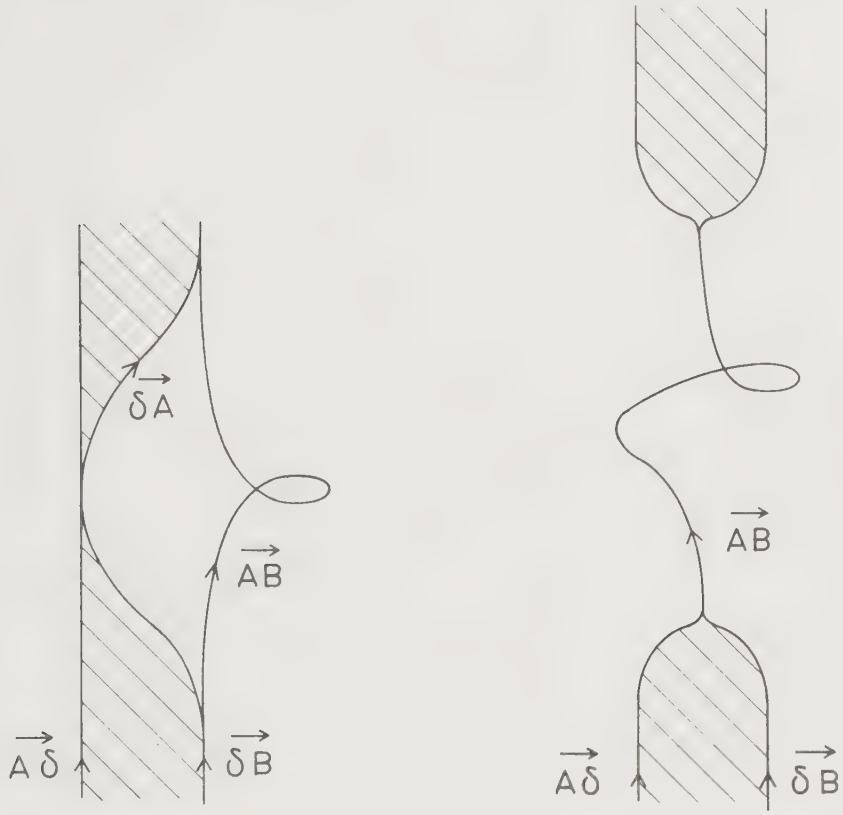


Fig. IV.6 - Boucle parfaite ayant réagi avec une dislocation partielle se transformant en spire d'hélice.

Equilibre de la configuration obtenue.

Pour trouver la forme d'équilibre des spires d'hélices obtenues, nous avons calculé l'énergie de la configuration de la figure IV.4 en fonction du pas $2\pi p$ de la spire pour différentes valeurs du diamètre 2 a (annexe 8).

Les résultats sont les suivants :

- quand la dislocation vis initiale n'est pas dissociée, l'énergie diminue toujours quand on augmente le pas (fig. IV.7). Il n'y a pas de position d'équilibre.

- quand la dislocation vis est dissociée l'énergie nécessaire à la recombinaison s'oppose à l'augmentation du pas $2\pi p$. On trouve une position d'équilibre dépendant de l'énergie de faute.

Pour une énergie de faute de l'ordre de 150 ergs/cm^2 (Aluminium) on obtient un rapport $\frac{2\pi p}{2a}$ voisin de 38 pour un diamètre de boucle compris entre une et huit distances interatomiques (fig. IV.8).

Pour $\gamma \simeq 50$ ergs/cm^2 (cuivre), on trouve dans les mêmes conditions $\frac{2\pi p}{2a}$ voisin de 4,7 (fig. IV.9).

IV.3.2.2 - Cas des cristaux à faible énergie de faute. (boucles de Frank).

La dislocation vis est alors très dissociée. Les boucles de quelques distances interatomiques de diamètre ne peuvent donc réagir qu'avec une seule des partielles. On a alors formation de dislocation "stair-rod", à l'intersection des deux plans de faute.

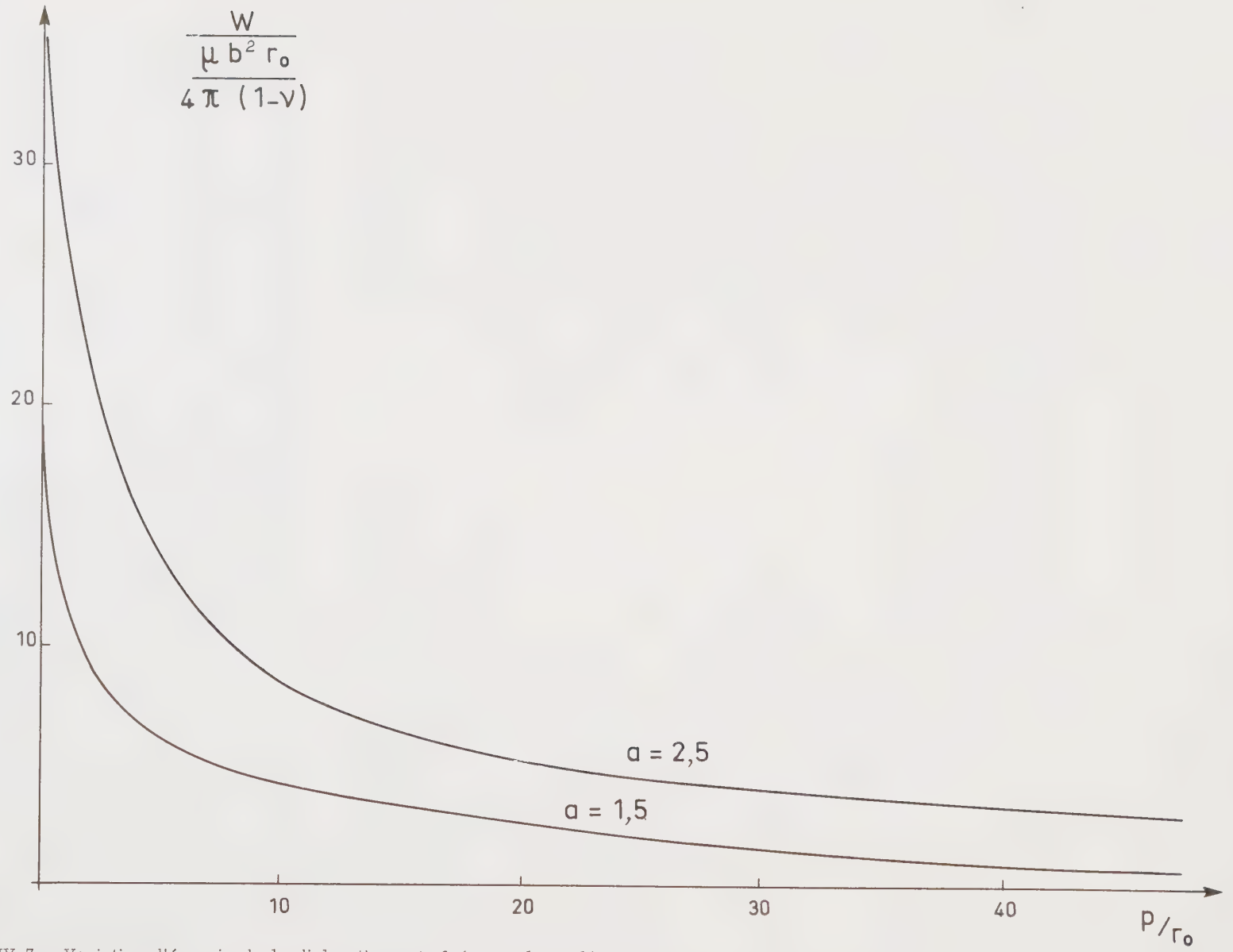


Fig. IV.7 - Variation d'énergie de la dislocation entraînée par la nucléation d'une spire d'hélice en fonction du pas $2\pi p$ de la spire (chaque courbe correspond à une valeur particulière du diamètre).

dislocation vis non dissociée.

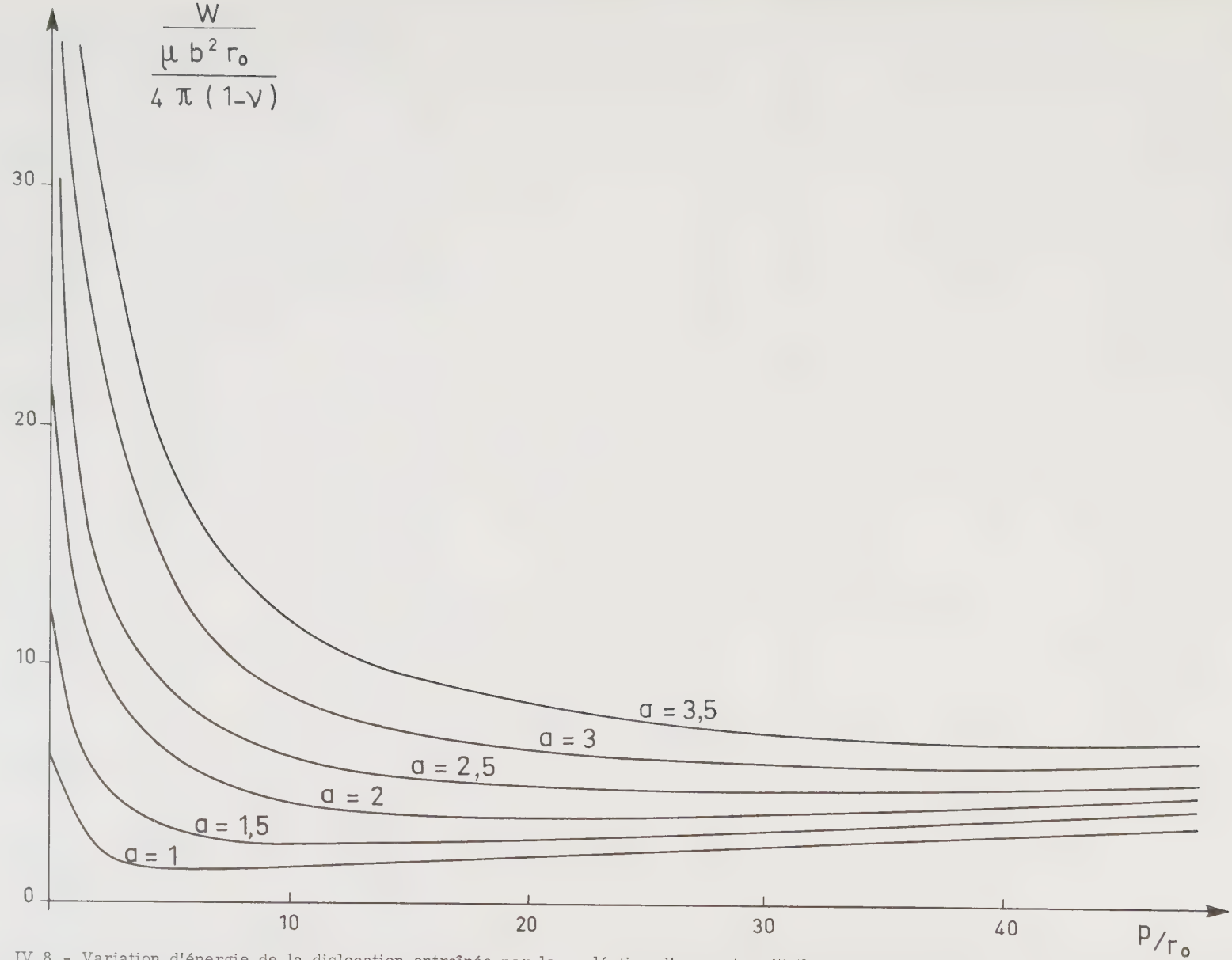


Fig. IV.8 - Variation d'énergie de la dislocation entraînée par la nucléation d'une spire d'hélice en fonction du pas 2 π p de la spire (chaque courbe correspond à une valeur particulière du diamètre).

dislocation vis dissociée. γ = 150 ergs/cm^2.

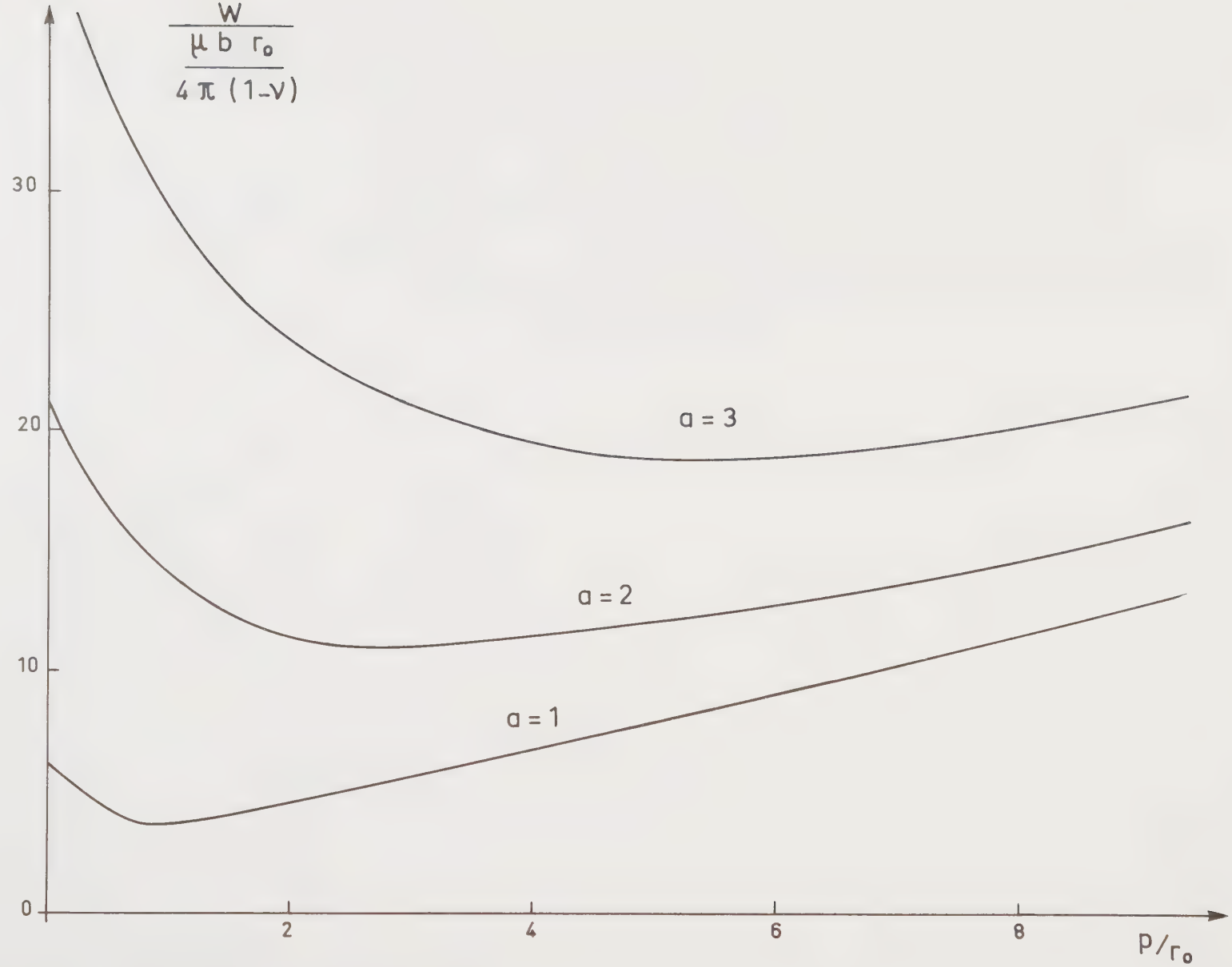


Fig. IV.9 - Variation d'énergie de la dislocation entraînée par la nucléation d'une spire d'hélice en fonction du pas $2\pi p$ de la spire (chaque courbe correspond à une valeur particulière du diamètre).

dislocation vis dissociée $\gamma = 50$ ergs/cm^2.

On suppose que la dislocation vis de vecteur de Burgers $\underset{\sim}{AB}$ est toujours dissociée dans le plan (d) suivant la réaction $\underset{\sim}{AB} \longrightarrow \underset{\sim}{A}\delta + \underset{\sim}{\delta}B$.

Les différentes réactions possibles sont les suivantes :

a) Réaction avec une boucle de Frank de vecteur de Burgers $\underset{\sim}{A}\alpha$

La réation ne peut se faire qu'à l'intersection des plans a et d.

La réaction avec la partielle de vecteur de Burgers $\underset{\sim}{A}\delta$ donne :

$$\underset{\sim}{A}\alpha - \underset{\sim}{A}\delta \longrightarrow \alpha\delta \qquad \text{(IV.3)}$$

$$\left(\text{énergie } \alpha \quad \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \qquad \frac{1}{9}\right)$$

Les deux plans de faute font un angle aigu (fig. IV.10). Avec la partielle $\underset{\sim}{\delta}B$ nous obtenons :

$$\underset{\sim}{\delta}B - \underset{\sim}{A}\alpha \longrightarrow \frac{\delta\alpha}{BA} \qquad \text{(IV.4)}$$

$$\left(\text{énergie } \alpha \quad \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \qquad \frac{5}{9}\right)$$

Les plans de faute font un angle obtus (fig. IV.11). Cette réaction est moins favorable que la précédente, la dislocation "stair-rod" créée demandant plus d'énergie.

b) Réaction avec une boucle de vecteur de Burgers $\underset{\sim}{B}\beta$.

On obtient les mêmes types de réactions et de configurations que dans le cas précédent :

$$\underset{\sim}{A}\delta + \underset{\sim}{B}\beta \longrightarrow -\frac{\delta\beta}{AB} \text{ (angle obtus)} \qquad \text{(IV.5)}$$

$$\left(\text{énergie} \quad \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \qquad \frac{5}{9}\right)$$

$$\underset{\sim}{\delta}B + \underset{\sim}{B}\beta \longrightarrow \delta\beta \quad \text{(angle aigu)} \qquad \text{(IV.6)}$$

$$\left(\text{énergie} \quad \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \qquad \frac{1}{9}\right)$$

Transformation des boucles de Frank en spires d'hélices.

La nucléation d'une boucle de Shockley à l'intérieur d'une boucle de Frank ayant réagi avec la dislocation vis conduit à la formation d'une spire d'hélice (fig. IV.12). Mais, comme l'a montré Saada, l'énergie d'activation nécessaire pour cette nucléation, est très élevée pour les métaux à faible énergie $\left(\gamma < \frac{\mu\, b^2}{10\,\pi\, K}\right)$ et empêche la transformation.

Ces boucles de Frank peuvent se décomposer dans les autres plans (III) et former des configurations analogues aux tétraèdres.

IV.3.3 - Conclusions et comparaisons avec l'expérience.

Les réactions étudiées ne conduisent à la formation d'hélices que dans le cas de cristaux à forte énergie de faute ($\gamma > 50$ ergs/cm^2). Ceci est en accord avec les observations expérimentales dans les métaux C.F.C. : on observe des hélices dans l'aluminium et ses alliages, mais on n'en observe pas dans l'argent et l'or.

D'autre part nous avons montré que, pour un nombre de lacunes absorbées donné, le pas d'équilibre d'une boucle spirale (fig. IV.4) est d'autant plus grand que l'énergie de faute est élevée. On peut en déduire que dans les métaux à forte énergie de faute, les premières boucles créées interfèrent rapidement et que l'hélice formée a un nombre de spires petit. C'est le cas de l'aluminium pur ($\gamma = 150$ ergs/cm^2) : seules des hélices de grandes tailles ont été observées par méthode de Lang (Authier).

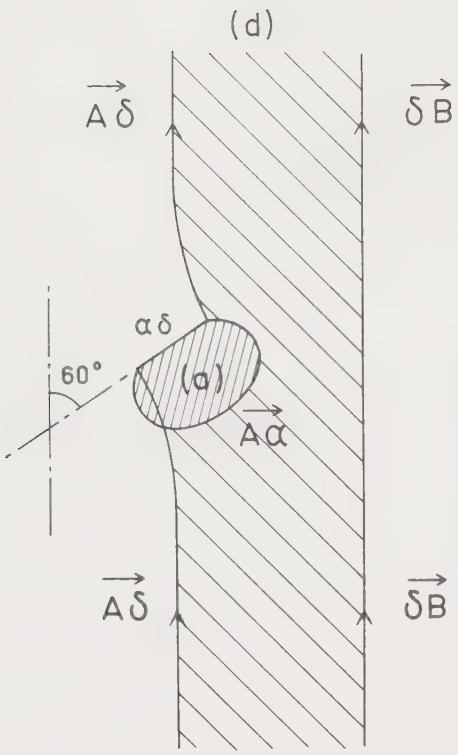


Fig. IV.10 - Réaction d'une boucle de Frank avec une dislocation partielle : les plans de faute font un angle aigu.

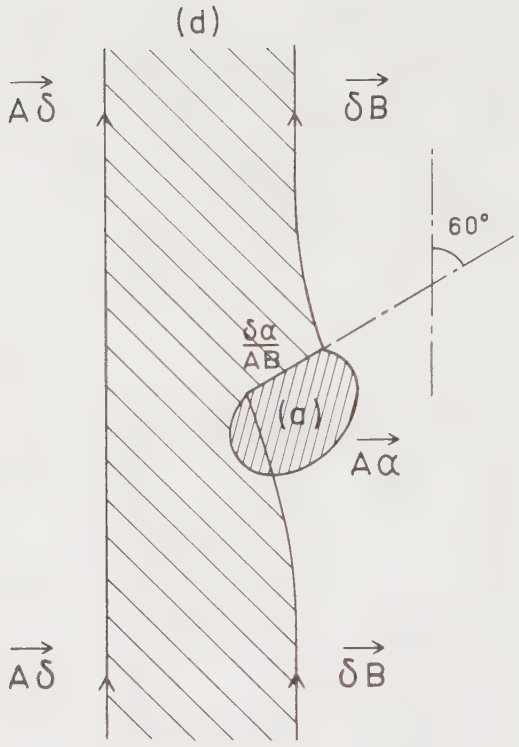


Fig. IV.11 - Réaction d'une boucle de Frank avec une dislocation partielle. Les plans de faute font un angle obtus.

Dans l'or et l'argent, on n'a pas observé de tétraèdres nuclées sur des dislocations vis. Mais Segall et Clarebrough [27] ainsi que Seidman [26] et Balluffi ont observé récemment des rangées de tétraèdres dans de l'or trempé. Leur formation est attribuée par ces auteurs aux déplacements des dislocations vis qui, en balayant le cristal, forment des amas de lacunes qui se transforment en tétraèdres. Le mécanisme que nous proposons permet de décrire la formation de ces tétraèdres.

D'autre part, des configurations semblables à celles décrites par la fig. (IV.10) ont été observées par Nicholson [28,29] dans un alliage Aluminium-Argent (16 %) dans les conditions suivantes :

Dans l'alliage trempé on observe des hélices mais après un revenu à 160°C, une nouvelle phase $\gamma'(Ag_2Al)$ précipite sur les plans de faute et augmente la dissociation des dislocations. Les hélices sont alors transformées en configurations décrites par la (fig. IV.10) suivant un mécanisme inverse envisagé pour la formation d'hélices à partir de boucles de Frank.

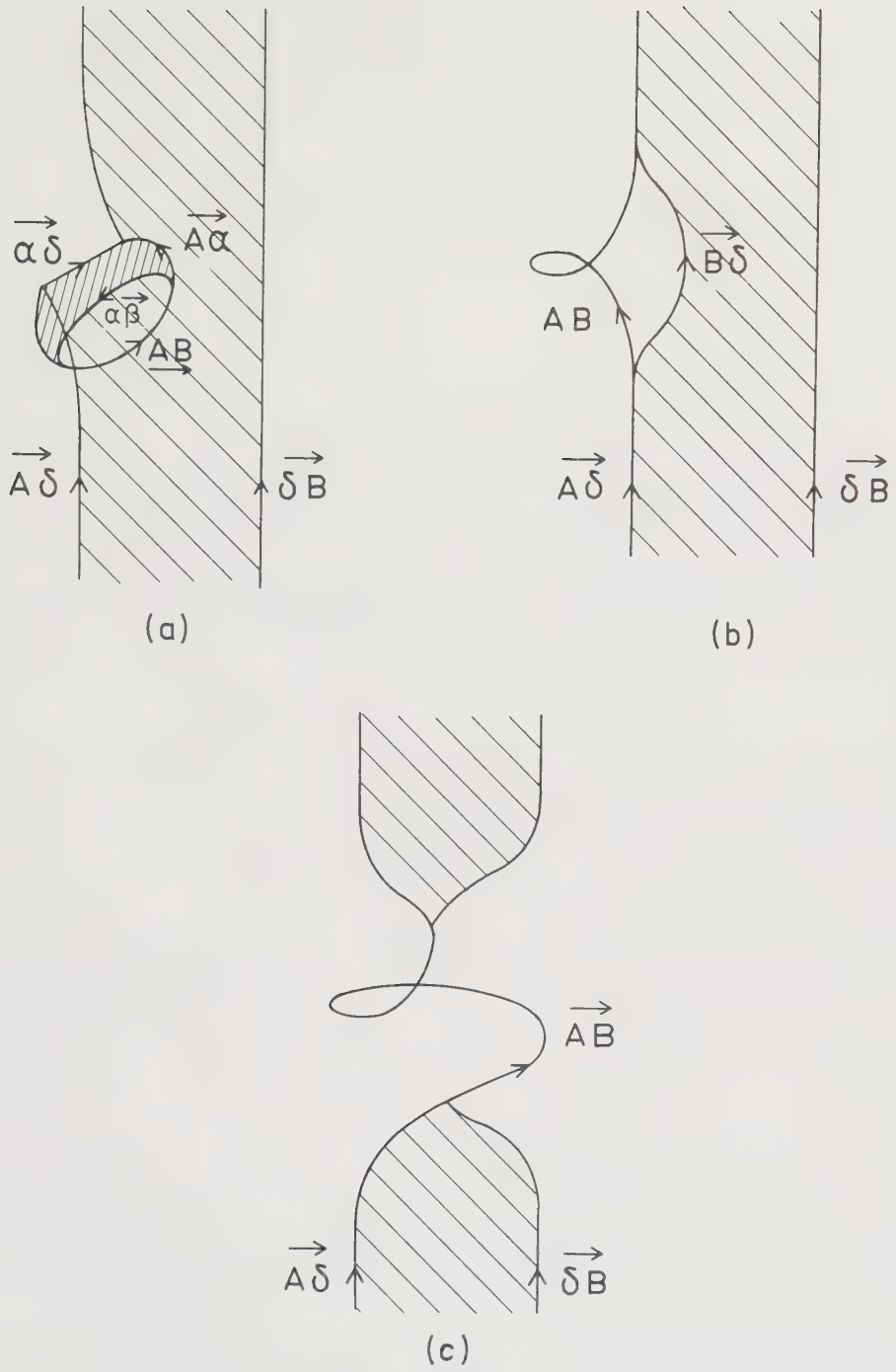


Fig. IV.12 - Transformation d'une boucle de Frank ayant réagi avec une dislocation partielle en spire d'hélice.

CHAPITRE V

ÉTUDE DE LA CROISSANCE DES HÉLICES

Nous supposons maintenant que la dislocation a pris une forme hélicoïdale. Tant que le rapport $\frac{p}{a}$ n'est pas petit cette forme hélicoïdale est stable (chapitre III.2). Elle est d'autant plus régulière que la vitesse d'arrivée des lacunes est faible devant leur vitesse de réarrangement le long de la dislocation. Ceci permet d'expliquer que les hélices obtenues après des trempes dures aient des formes très irrégulières (le flux de lacunes arrivant sur la dislocation est alors important).

L'hélice n'ayant pas de taille d'équilibre stable ses dimensions (dépendant des paramètres p et a) varient tant que les lacunes peuvent diffuser en volume. Le sens de ces variations dépend du signe de la force $\underset{\sim}{F}$ (chapitre III.1) s'exerçant sur la dislocation :

$$\underset{\sim}{F} = \frac{a}{a^2 + p^2} \left(\tau - \sqrt{a^2 + p^2} \frac{kT}{b^2} \operatorname{Log} \frac{c}{c_o} \right) \underset{\sim}{n}$$

En utilisant l'expression de la tension de ligne calculée au chapitre III on obtient la condition suivante pour que les hélices puissent croître :

$$\operatorname{Log} \frac{c}{c_o} > \frac{b^2}{2\, n\, \pi\, a\, bT} \left(\frac{\partial W}{\partial a} + \frac{\partial c}{\partial a} \frac{\partial W}{\partial c} \right) \qquad (V.1)$$

où W est l'énergie d'une hélice de n spires de diamètre 2 a et de pas $2\pi p = 2\pi . c . a$.

Quand la relation (V.1) n'est pas vérifiée, la taille des hélices diminue.

Cette relation dépend des conditions aux limites de l'hélice par l'intermédiaire de $\frac{dc}{da}$. Nous étudions dans la suite l'évolution de l'hélice dans les deux cas suivants : extrémités libres et extrémités fixes.

IV.1 - CAS OU LES EXTREMITES DE L'HELICE SONT LIBRES.

On suppose que les extrémités sont libres et ne sont soumises à aucune force. Le rapport $c = \frac{p}{a}$ est alors constant et égal à 0,45.

La taille de l'hélice augmente tant que la relation (V.1) est satisfaite. Quand la concentration de lacunes a suffisamment diminué cette relation n'est plus vérifiée : Les lacunes diffusent alors de l'hélice vers les autres puits de lacunes (surfaces, autres dislocations).... et la taille de l'hélice diminue. Pour un temps suffisamment long l'hélice doit disparaître. Dans ces conditions l'hélice se comporte de la même manière que les boucles de trempe.

V.1.1 - Cas où les extrémités ne peuvent se déplacer que dans un plan perpendiculaire à l'axe de l'hélice.

Les extrémités peuvent jouer un rôle important en permettant à l'hélice de se dérouler, ce qui, en diminuant son nombre de spires, diminue son énergie. C'est par exemple le cas représenté par la figure V.I : Le segment de dislocation OA, en émettant des lacunes, diminue le nombre de spires de l'hélice. Ceci peut être facilité par la présence de puits de lacunes (surfaces ... etc) au voisi-

nage des extrémités. Ce déroulement peut permettre à l'hélice de garder un rapport $\frac{p}{a}$ voisin de 0,45 pendant sa croissance, bien que la longueur de l'hélice ne puisse pas augmenter. La vitesse de déroulement ne dépend pas de la longueur de l'hélice. Son rôle sera donc important pour les hélices ne comportant qu'un petit nombre de spires.

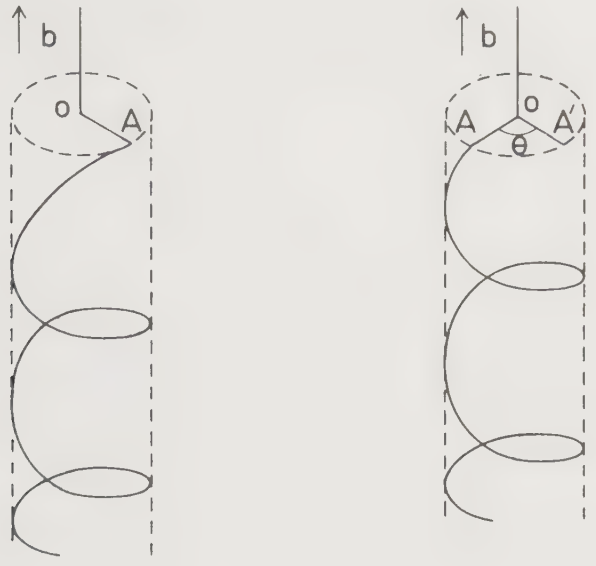


Fig. V.1 - Hélice diminuant son énergie en se déroulant.

Dans tous les cas, il retarde les conditions d'apparition d'instabilité $\left(\frac{p}{a} \text{ petit}\right)$

V.2 - CAS OU LES EXTREMITES SONT FIXEES (par exemple par des précipités).

Le rapport $c = \frac{p}{a}$ varie et on a :

$$\frac{dc}{da} = -\frac{c}{a}$$

Au début de la croissance le pas $2\pi p$ reste constant. Le rapport $\frac{p}{a}$ diminue et l'énergie augmente rapidement (chapitre II.1). Si la relation (V.1) est toujours vérifiée on peut envisager plusieurs plusieurs processus permettant à la dislocation de diminuer son énergie.

a) L'hélice peut diminuer son énergie par glissement en franchissant ses points d'ancrage (fig. V.2). Pour que ce processus puisse avoir lieu, il faut que la force exercée par l'hélice sur ses extrémités soit supérieure à la force due à la tension de ligne de la dislocation créée. Nous avons vu (chapitre II.1) que ceci est réalisé quand $\frac{2\pi p}{2a}$ est inférieur à 0,8.

L'hélice peut réagir avec la dislocation vis crée et émettre des boucles prismatiques. Ceci a été observé par Dash dans du silicium.

b) Si l'hélice ne franchit pas ses points d'ancrage le rapport $\frac{p}{a}$ continue à diminuer quand le diamètre augmente. Le paragraphe précédent montre que, quand $\frac{p}{a} \longrightarrow 0$ la forme de l'hélice devient instable. (Le rapport critique $\frac{p}{a}$ pour lequel apparaît cette instabilité n'a malheureusement pas pu être déterminé).

Le diamètre n'étant plus le même en chaque point de l'hélice, on peut supposer que les spires dont le diamètre diminue vont disparaître par diffusion des lacunes le long de la dislocation vers les spires de plus grand diamètre.

L'hélice diminue donc son énergie en diminuant son nombre de spires.

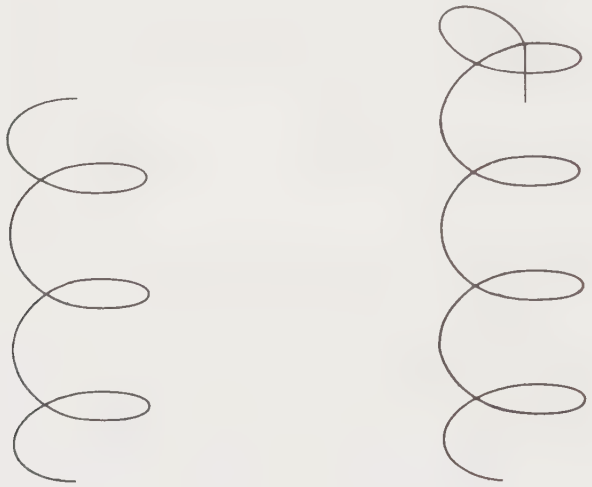


Fig. V.2 - Hélice ayant franchi ses points d'ancrage.

CONCLUSION

Dans la première partie, nous avons étudié certaines propriétés des dislocations hélicoïdales.

En utilisant la théorie des milieux continus de Kroëner, nous avons calculé l'énergie d'une hélice de pas $2\pi p$ et de diamètre 2 a quelconque. Quand les forces exercées sur les extrémités sont faibles, l'énergie est minimum pour $\frac{2\pi p}{2a}$ voisin de 1, 4, ce qui est en bon accord avec les hélices observées.

Sous l'action d'une contrainte uniforme les hélices se déforment par glissement. L'étude de ces déformations montre que pour $\sigma > \frac{\tau b}{a}$ les hélices de diamètre 2 a sont détruites et se transforment en sources analogues aux sources de Frank-Read.

Les réactions des hélices avec les dislocations de vecteurs de Burgers opposés conduisent à la formation de boucles prismatiques. Les calculs d'énergie d'interaction montrent que les forces exercées par une hélice sur ces dislocations est égale à celle qu'exercerait une dislocation vis située suivant l'axe de l'hélice.

Dans une seconde partie, nous abordons le problème de la stabilité quand la dislocation peut monter par absorption ou émission de lacunes.

Les résultats obtnus par Weertman en ce qui concerne l'instabilité de la taille des hélices ont été établis d'une façon plus générale sans utiliser une tension de ligne constante. Cette instabilité pose les problèmes de germination et de croissance des hélices.

L'étude de la stabilité de la forme hélicoïdale n'a pu être faite que dans les deux cas extrêmes $p \gg a$ et $p \ll a$. Dans le premier cas ($p \gg a$) la forme hélicoïdale est stable. Dans le second ($p \ll a$) elle est instable. La valeur critique de $\frac{p}{a}$ pour laquelle apparaît cette instabilité n'a malheureusement pas pu être déterminé.

Dans la dernière partie nous étudions les problèmes de germination et de croissance.

Les calculs d'énergie d'hélices et l'étude de la diffusion des lacunes le long des dislocations permettent de montrer que le nombre de spires ne peut que diminuer pendant la croissance. Nous proposons le modèle suivant : les dislocations vis ou presque vis dissociées ne peuvent pas absorber les monolacunes en forte sursaturation. Celles-ci, en diffusant le long des dislocations, forment des amas qui peuvent se transformer en spires d'hélices (cristaux à forte énergie de faute).

Quand l'énergie de faute est faible, ces amas peuvent former des configurations analogues aux tétraèdres.

Les résultats obtenus concernant l'équilibre et la stabilité permettent de décrire qualitativement la croissance des hélices.

ANNEXE 1

Formule permettant de calculer l'énergie d'une dislocation et ne faisant intervenir le rayon de coupure que dans les bornes de l'intégrale.

L'énergie de la dislocation se met sous la forme :

$$W \oint_c \underset{\sim}{\tau}(r, \varphi, z).\ \underset{\sim}{dl}$$

où $\underset{\sim}{\tau}(r, \varphi, z)$ peut être interprété comme étant la moitié de l'énergie d'interaction de l'élément $\underset{\sim}{dl}$ avec toute la dislocation.

En éliminant l'interaction de l'élément $\underset{\sim}{dl}$ avec lui-même, on obtient :

$$\tau_z = \frac{\mu b^2}{8\pi(1-\nu)} \left| -(1+\nu) A_z + B_z \right|$$

$$\tau_r = \frac{\mu b^2}{8\pi(1-\nu)} B_r$$

$$\tau_\varphi = \frac{\mu b^2}{8\pi(1-\nu)} B_\varphi$$

avec :

$$A_z = \oint_c - \int_{R=-\frac{r_o}{z}}^{R=+\frac{r_o}{z}} \frac{dz}{R}$$

$$B_r = \oint_c - \int_{R=-\frac{r_o}{z}}^{R=+\frac{r_o}{z}} - \left(\frac{1}{R} + \frac{Z^2}{R^3}\right) (\cos\Phi\, dr + r \sin\Phi\, d\Phi)$$

$$B_\varphi = \oint_c - \int_{R=-\frac{r_o}{z}}^{R=+\frac{r_o}{z}} \left(\frac{1}{R} + \frac{Z^2}{R^3}\right) (-\sin\Phi\, dr + r\cos\Phi\, d\varphi)$$

$$B_z = \oint_c - \int_{R=-\frac{r_o}{z}}^{R=+\frac{r_o}{z}} \left(\frac{1}{R} + \frac{Z^2}{R^3}\right) dz$$

et :

$$R^2 = r^2 + r_o^2 - 2 r r_o \cos\Phi + Z^2$$

$$Z = z - z_o$$

$$\Phi = \varphi - \varphi_o$$

r_o, φ_o, z_o sont les coordonnées de l'élément dl dont on calcule la tension de ligne $\underset{\sim}{\tau}$.

r, φ, z, sont les coordonnées d'un point quelconque de la dislocation.

Dans le cas d'une hélice de n spires, on obtient, en prenant l'orgine au milieu de l'hélice :

$$B_r = \int_{-n\pi}^{\Phi_0 - \frac{r_0}{2a+p}} + \int_{\Phi_0 + \frac{r_0}{2\sqrt{a^2+p^2}}}^{n\pi} \left(\frac{1}{R} + \frac{Z^2}{R^3}\right) a \sin\Phi \, d\Phi$$

$$B_\phi = \int_{-n\pi}^{\Phi_0 - \frac{r_0}{2a+p}} + \int_{\Phi_0 + \frac{r_0}{2\sqrt{a^2+p^2}}}^{n\pi} \left(\frac{1}{R} + \frac{Z^2}{R^3}\right) a \cos\Phi \, d\Phi$$

$$B_z = \int_{-n}^{\Phi_0 - \frac{r_0}{2a+p}} + \int_{\Phi_0 + \frac{r_0}{2a+p}}^{n\pi} \left(\frac{1}{R} + \frac{Z^2}{R^3}\right) p \, d\Phi$$

$$A_z = \int_{-n\pi}^{\Phi_0 - \frac{r_0}{2\sqrt{a^2+p^2}}} + \int_{\Phi_0 + \frac{r_0}{2\sqrt{a^2+p^2}}}^{n\pi} \left(\frac{p \, d\Phi}{R}\right)$$

ANNEXE 2

ÉNERGIE D'INTERACTION D'UNE HÉLICE AVEC UNE DISLOCATION VIS

Cette énergie se met sous la forme :

$$W = -\frac{\mu b^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} p\,d\varphi \int_0^1 \left|\frac{1}{R} - \frac{1}{1-\nu}\frac{(d^2 + a^2 - 2ad\cos\varphi)}{R^3}\right| dZ$$

avec :

$$R^2 = d^2 + a^2 - 2ad\cos\varphi + Z^2$$

$$p\varphi - z = Z$$

L'intégration sur Z donne :

$$W = \frac{\mu b^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} p\,d\varphi \left|\text{Log}\frac{l + \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad\cos\varphi + l^2}}{\sqrt{a^2 + d^2 - 2ad\cos\varphi}} - \frac{1}{1-\nu}\frac{1}{\sqrt{d^2 + a^2 + l^2.\ 2ad\cos}}\right|$$

on utilise le développement du logarithme en fonction de $\frac{a^2 + d^2}{l^2}$

$$\text{Log}\,(l + \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad\cos\varphi + l^2}) \simeq \text{Log}\,2l + \frac{1}{4}\frac{a^2 + d^2 - 2ad\cos\varphi}{l^2}$$

soit :

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\ \text{Log}\,(l + \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad\cos\varphi + l^2}) = 2\pi\left(\text{Log}\,2l^2 + \frac{a^2 + d^2}{4^2}\right)$$

d'autre part on a :

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\ \text{Log}\,\sqrt{a^2 + d^2 - 2ad\cos\varphi} = 2\pi\ \text{Log}\,|\sup(a, d)|$$

et :

$$\int_0^{2\pi}\frac{d}{\sqrt{d^2 + a^2 + l^2 - 2ad\cos\varphi}} = \int_0^{2\pi}\frac{d}{\sqrt{(d+a)^2 + l^2 - 4ad\cos^2\varphi/2}} = \frac{4}{\sqrt{(d+a)^2 + l^2}}\,K(k)$$

K(k) étant l'intégrale elliptique de première espèce d'argument :

$$k = \sqrt{\frac{4ad}{(d+a)^2 + l^2}}$$

L'énergie d'interaction est donc égale à :

$$W = \frac{\mu b^2}{2\pi}\left|2\pi p\left(\frac{a^2 + d^2}{4l^2} + \text{Log}\frac{4l}{|a-d| + a + d}\right) - \frac{4.p\,l}{1-\nu}\frac{K(k)}{(d+a)^2 + l^2}\right|$$

On utilise les premiers termes du développement de K(k) pour les petites valeurs de k.

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{k^2}{4} \cdots\right)$$

On obtient :

$$W = \frac{\mu b^2}{2\pi}\left|\text{Log}\ \frac{\sup(d, a)}{2l} + \frac{1}{l(1-\nu)} + \frac{1+\nu}{1-\nu}\ \frac{a^2 + d^2}{4l^2}\right|$$

ANNEXE 3

FORME D'ÉQUILIBRE DE L'HÉLICE EN PRÉSENCE D'UNE DISLOCATION VIS

Nous avons calculé l'énergie d'interaction entre les dislocations vis et les dislocations hélicoidales en les supposant indéformables. C'est par exemple le cas quand les dislocations sont ancrées en de nombreux points (nuage de Cottrell) ou, comme nous le verrons par la suite, quand les dislocations sont à grande distance l'une de l'autre.

Nous calculons dans cette annexe la forme d'équilibre prise pas l'hélice sur son cylindre de glissement en présence d'une dislocation vis rectiligne.

L'énergie d'interaction d'un élément dz de l'hélice avec la dislocation vis se met sous la forme (chapitre II.3) :

$$w(\varphi)\, dz = \frac{\mu b^2}{2\pi} \left| \mathrm{Log} \frac{r}{l + \sqrt{r^2 + l^2}} \quad \frac{1}{1 - \nu} \quad \frac{l}{\sqrt{r^2 + l^2}} \right|$$

avec :

$$r^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \varphi$$

En développant la surface du cylindre et en prenant un axe ox dans cette surface perpendiculaire à l'axe oz, on obtient en posant $X = a\varphi$:

$$w(\varphi)\, dz = w(X) \frac{\partial z}{\partial X} dX$$

La position d'équilibre de l'hélice est alors obtenue en minimisant l'énergie :

$$W = \int_0^{2\pi a} \left(z'(X)\, w(X) + \tau \sqrt{1 + z'(X)^2} \right) dX$$

τ étant la tension de ligne de l'hélice. En utilisant les équations de Lagrange on obtient :

$$\frac{d}{dX} \left(w(X) + \tau \frac{z'}{\sqrt{1 + z'^2}} \right) = 0$$

soit :

$$\cos \psi = A - \frac{w(X)}{\tau}$$

où ψ est l'angle que fait la dislocation avec son vecteur de Burgers et A une constante d'intégration. La forme d'équilibre de l'hélice est alors donnée par l'intégrale :

$$Z - Z_0 = \int_{X_0}^{X} \frac{A - \frac{w(X)}{\tau}}{\sqrt{1 - \left(A - \frac{w(X)}{\tau} \right)^2}}$$

La constante A dépend des conditions aux limites. Si l'hélice est fixée à ses extrémités elle est donnée par la relation :

$$2\pi p = \int_0^{2\pi a} z'(X, A)\, dX$$

Dans le cas d'une boucle de trempe on a $2\pi p = 0$.

La figure (II.6) représente la forme d'équilibre dans le cas d'une hélice et d'une boucle.

Dans tous les cas, la dislocation se déforme en se mettant parallèle à la dislocation vis, les vecteurs de Burgers étant alors opposés.

L'importance de ces déformations dépend du rapport $\frac{w(X)}{\tau}$.

Pour $w(X) \ll \tau$, soit pour $d \gg 2a$, ces déformations sont négligeables.

ANNEXE 4

Avec les notations utilisées au chapitre III, la variation d'énergie de l'hélice due aux oscillations s'écrit :

$$\Delta W = \frac{\mu b^2}{8 \pi (1 - \nu)} \int_{-\frac{l}{2p}}^{+\frac{l}{2p}} = d\varphi' \int_{-\frac{L}{2p}}^{+\frac{L}{2p}} E_2 \, d\varphi$$

avec :

$$E_2 = - (1 + \nu) p^2 . (\alpha^2 \sin^2 k\varphi + \alpha'^2 \sin^2 k\varphi' + 2 \alpha\alpha' \sin k\varphi . \sin k\varphi') \frac{1}{R_o}$$

$$+ (aa' \cos \Phi + p^2) (\alpha \sin k\varphi + \alpha' \sin k\varphi')^2 . \mathcal{R} . \frac{1}{R_o}$$

$$+ | k^2 \cos\Phi \cos k\varphi . \cos k\varphi' + k \sin\Phi (\sin k\varphi' . \cos k\varphi - \sin k\varphi . \cos k\varphi')$$

$$+ \cos\Phi \sin k\varphi . \sin k\varphi' | \mathcal{R} . \frac{1}{R_o} + | k \sin\Phi (a' \cos k\varphi - a \cos k\varphi')$$

$$+ \cos\Phi (a' \sin k\varphi + a \sin k\varphi') (\sin k\varphi + \sin k\varphi') | \mathcal{R} . \frac{1}{R_o}$$

$$+ (1 + \nu) p^2 \left(\frac{\alpha}{4a} + \frac{\alpha'}{4a'}\right) . \frac{1}{R_o} (a' a \cos\Phi + p^2) \left(\frac{\alpha}{4a} + \frac{\alpha'}{4a'}\right) \mathcal{R} . \frac{1}{R_o}$$

$$- \cos\Phi \left(\frac{a'}{4a} + \frac{a}{4a'}\right) \mathcal{R} . \frac{1}{R_o}$$

avec :

$$\varphi = \Phi + \varphi'$$

on peut intervenir l'ordre des intégrations sur Φ et φ' et des dérivations α, α', et $\mathcal{R}$.

En posant :

$$S(k) = \int_{-\frac{L}{2p}}^{+\frac{L}{2p}} \frac{\cos k\Phi}{R} . \, d\Phi$$

On obtient :

$$\Delta W = \frac{\mu b^2 . l . e^2 c}{8\pi(1-\nu)\ 2p} \Big| -(1+\nu)\ p^2\ (\alpha^2 + \alpha'^2 \Big|.\ S(0)$$

$$+ 2\alpha\alpha'.\ S(k)) + aa'\ (\alpha^2 + \alpha'^2)\ \mathcal{R}.\ S(1)$$

$$+ a'\ \alpha.\alpha'\ \mathcal{R}\ (S(1+k) + S(1-k))$$

$$+ p^2\ \mathcal{R}.\ \Big|\ (\alpha^2 + \alpha'^2).\ S(0) + 2\alpha\alpha'\ S(k).\ \Big|$$

$$+ \frac{1+k^2}{2}.\ \mathcal{R}.\ (S(1-k) + S(1+k)) - \frac{k}{2}\ (a\alpha + a'\alpha')\ \mathcal{R}'\ (S(1-k) - S(1+k))$$

$$+ (a'\alpha + a\alpha').\ \mathcal{R}.\ S(1) + \frac{1}{2}\ (a\alpha + a'\alpha')\ \mathcal{R}.\ (S(1+k)$$

$$+ S(1-k)) + (1+\nu)\frac{p^2}{2}\left(\frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha'}{a'}\right).\ S(0)$$

$$- \frac{1}{2}\ a'a\left(\frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha'}{a'}\right).\ \mathcal{R}.\ S(1) - \frac{1}{2}\ p^2\left(\frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha'}{a'}\right)\ \mathcal{R}.\ S(0)$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a} + \frac{a}{a'}\right)\ \mathcal{R}.\ S(1)$$

L'expression de ΔW se simplifie dans les cas où $a \ll p$ et $a \gg p$.

Cas où $p \gg a$.

En utilisant le développement de ΔW en fonction de $\frac{a}{p}$ on obtient :

$$\Delta W = \frac{\mu b^2}{8\pi(1-\nu)}\frac{l\,e^2}{2p}\Big[-(1+\nu)\ p^2\ (\alpha^2 + \alpha'^2)\ S(0)$$

$$+ 2\alpha\alpha'.\ S(k) + p^2\ \mathcal{R}.\Big|\ (\alpha^2 + \alpha'^2)\ S(0) + 2\alpha\alpha'.\ S(k)\Big|$$

$$+ (1+\nu)\frac{p^2}{2}\left(\frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha'}{a'}\right)\ S(0) - \frac{p^2}{2}\left(\frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha'}{a'}\right)\ \mathcal{R}.\ S(0)$$

$$+ \frac{1+k^2}{2} \times \mathcal{R}\ \Big|\ S(1+k) + S(1-k)\Big|\ - k\,\mathcal{R}.\ \Big|\ S(1-k) - S(1+k)\ \Big|\ \Big]$$

Cas où $a \gg p$

On utilise le développement de ΔW en fonction de $\frac{p}{a}$. On obtient :

$$\Delta W = \frac{\mu b^2}{8\pi(1-\nu)} : \frac{l\,e^2}{2p}\ \Big| aa'\ (\alpha^2 + \alpha'^2).\ \mathcal{R}.\ S(1)$$

$$+ \frac{1}{2}\ (a'\alpha + a\alpha')\ \mathcal{R}.\ S(1) - \frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a} + \frac{a}{a'}\right)\ \mathcal{R}.\ S(1)$$

$$+ \left(aa'\ \alpha\alpha' + \frac{1+k^2}{2} + \frac{a}{2}\alpha + \frac{a'}{2}\alpha'\right) \times \mathcal{R}\ (S(1+k) + S(1-k))\Big|$$

ANNEXE 5

Calcul de :

$$S(k) = \int_{-\frac{L}{2p}}^{+\frac{L}{2p}} \frac{\cos k\Phi}{\sqrt{a^2 + a'^2 - 2aa' \cos\Phi + p^2\Phi^2}}\, d\Phi$$

avec k non entier pour $L \gg \frac{2\pi p}{k}$ nous avons :

$$S(k) \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos k\Phi}{R}\, d\Phi$$

on remplace $\frac{1}{R}$ par son développement en série [10] :

$$\frac{1}{R} = \frac{2}{\pi} \sum_{o}^{\infty} \varepsilon_n \cos n\Phi \int_{o}^{\pi} \frac{\cos n\psi}{\sqrt{a^2 + a'^2 - 2aa' \cos\psi + p^2\Phi^2}}\, d\psi$$

avec :

$$\varepsilon_n = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } n = 0 \\ 1 \text{ si } n \neq 0 \end{cases}$$

L'ordre des intégrations sur ψ et sur Φ peut être interverti, on obtient :

$$S(k) = \frac{2}{\pi} \sum_{o}^{\infty} \varepsilon_n \int_{o}^{\pi} \cos\psi\, d\psi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos k\Phi \cos n\Phi}{\sqrt{a^2 + a'^2 - 2aa' \cos\psi + p^2\Phi^2}}\, d\Phi$$

soit :

$$S(k) = \frac{2}{p\pi} \sum_{o}^{\infty} \varepsilon_n \int_{o}^{\pi} \cos n\psi \left[K_o\left((n+k)\frac{P}{p}\right) + K_o\left((n-k)\frac{P}{p}\right) \right] d\psi$$

avec $P^2 = a^2 + a'^2 - 2aa' \cos\psi$.

K_o représentant la fonction de Bessel [11] modifiée d'ordre 0 de seconde espèce. D'après le théorème de Gegenbauer [11] nous avons :

$$K_o\left(\frac{hP}{p}\right) = 2 \sum_{o}^{\infty} \varepsilon_m I_m\left(\frac{a}{p}\right) K_m\left(\frac{a'}{p}\right) \cos m\Phi$$

I_m et K_m étant les fonctions de Bessel modifiées de troisième et deuxième espèces.

S (k) se met sous la forme :

$$S(k) = \frac{2}{p} \sum_{o} \varepsilon_n \left[I_n\left(|n+k|\frac{a}{p}\right) K_n\left(|n+k|\frac{a'}{p}\right) + I_n\left(|n-k|\frac{a}{p}\right) K_n\left(|n-k|\frac{a'}{p}\right) \right]$$

ANNEXE 6

1/ Calcul de ΔW pour les petites valeurs de $\frac{p}{a}$.

On utilise le développement de $I_n(x)$ et de $K_n(x)$ pour x petit.

On obtient :

$$S(0) = \frac{2}{p} \operatorname{Log} \frac{2L}{r_o} + \frac{aa'}{p^3} \left(\operatorname{Log} \frac{r_o}{2p} + \gamma - \frac{1}{2} \right)$$

γ étant la constante d'Euler

r_o étant le rayon du coeur de la dislocation :

$$S(k) = \frac{2}{p} \operatorname{Log} \frac{2p}{k r_o} + \frac{aa'}{p^3} \left| \operatorname{Log} \frac{r_o}{2p} + f(k) \right|$$

avec $f(k) \ll \left| \operatorname{Log} \frac{r_o}{2p} \right|$

on obtient alors :

$$\Delta W = \frac{\mu b^2}{16 \pi (1 - \nu)} \frac{l e^2}{p^2} \cdot (7 + 4k^2 - \nu) \operatorname{Log} \frac{2p}{r_o} > 0$$

2/ Cas où $a \gg p$.

On utilise les formes asymptotiques de $I_n(x)$ et $K_n(x)$ pour $x \longrightarrow \infty$.

$$I_n(x) \longrightarrow \frac{e^x}{\sqrt{2 \pi x}}$$

$$K_n(x) \longrightarrow \sqrt{\frac{2 \pi}{3}} \, e^{-x}$$

on obtient :

$$S(1) \simeq - \frac{4}{\sqrt{aa'}} \log \frac{r_o}{p} + \frac{1}{p} \cdot \frac{a^2 + a'^2}{2 aa'}$$

$$S(1 + k) \simeq S(1 - k) \simeq - \frac{4}{\sqrt{aa'}} \operatorname{Log} \frac{r_o}{p} + \frac{4}{p} I_1 \left(\frac{k a}{p} \right) K_1 \left(\frac{k a'}{p} \right)$$

Cas où $k \gg \frac{p}{a}$

$$\frac{2}{p} I_1 \left(\frac{k a}{p} \right) K_1 \left(\frac{k a'}{p} \right) \longrightarrow \frac{1}{k} \frac{1}{\sqrt{aa'}} \exp \left(- \frac{k r_o}{p} \right)$$

La variation d'énergie se met sous la forme :

$$\Delta W = -\frac{\mu b^2}{4\pi(1-\nu)}\, l\, \frac{e^2}{p^2} > 0$$

Cas où $k \ll \frac{p}{a}$

$$\frac{2}{p} I_1\left(\frac{k a}{p}\right) K_1\left(\frac{k a'}{p}\right) \longrightarrow \frac{1}{p}\frac{a}{a'} + \frac{k^3 aa'}{2 p^3}\left(\operatorname{Log}\frac{k a'}{p} + \gamma - \frac{1}{2}\right) + \frac{k^2 a^3}{8 p^3 a'}$$

on obtient :

$$\Delta W \simeq -\frac{\mu b^2 (1 - 4 k^2)}{8\pi(1-\nu)}\, l.\, \frac{e^2}{p.\, a} \operatorname{Log}\frac{a'}{r_o\, e}$$

ANNEXE 7

FORME DES HÉLICES CORRESPONDANT AU MINIMUM DE L'ÉNERGIE POUR UN NOMBRE DE LACUNES ABSORBÉES DONNÉ

La longueur d'une hélice ancrée en deux points A et B reste constante quel que soit le nombre de spires et est égale à L = AB cos φ, φ étant l'angle de la direction AB avec le vecteur de Burgers de la dislocation. A un nombre N de lacunes absorbées donné correspond un certain nombre d'hélices dont les paramètres a_i, p_i et n_i sont liés par les relations suivantes :

$$n_1 \pi a_1^2 = \ldots = n_i \pi a_i^2 \ldots = N b^2$$
$$n_1 2\pi p_1 = \ldots = n_i . 2\pi p_i = \ldots = L$$

L'énergie de ces hélices dans les cas ou a $\gg$ p et a $\ll$ p est, d'après De Wit, égale à :

p $\gg$ a

$$W = L\frac{\mu b^2}{2\pi}\left\{\text{Log}\frac{4L}{r_o} - \frac{2-\nu}{1-\nu} + \frac{N\pi b^2 n}{L^2}\left|2.\frac{1+\nu}{1-\nu}\left(\text{WLog}\frac{L}{\pi r_o n} - \gamma\right) - \frac{5-\nu}{1-\nu}\right|\right\}$$

p $\ll$ a

$$W = \frac{2L\mu b^2}{1-\nu}\left\{\frac{n N b}{L^2} - \frac{b}{L}\sqrt{\frac{N n}{\pi}}\left(\text{Log}\frac{2\pi r_o n}{L} + 1\right)\right\} + \frac{L\mu b^2}{2\pi}\left\{\frac{1}{2}\text{Log}\frac{16 L^2 \pi n}{N b^2} - \frac{2-\nu}{1-\nu}\right\}$$

dans le cas où $\frac{p}{a} \simeq 0,45$ on obtient (chapitre II).

$$W = \mu b^2 \sqrt{n.\frac{N b^2}{\pi}}\left\{5,76 + 7,42\,(c - 0,45)^2 + \frac{c}{2}\text{Log}\frac{n}{10} + \frac{c^2 + 1 - \nu}{2(1-\nu)\sqrt{1+c^2}}\text{Log}\frac{\sqrt{\frac{N b^2}{n\pi}}}{1000\, r_o}\right\}$$

avec $c = \frac{p}{a} = \frac{L}{\sqrt{4\pi n.\, N.\, b^2}}$

Dans les 3 cas l'énergie est une fonction croissante de n. L'hélice la plus stable est donc celle ne comportant qu'une seule spire.

ANNEXE 8

CALCUL DE L'ÉNERGIE D'UNE SPIRE NUCLÉE SUR UNE DISLOCATION VIS

Nous supposons que la dislocation vis est dissociée. La distance séparant les dislocations partielles est donnée par :

$$d = \frac{\mu \underset{\sim}{b}_1 \underset{\sim}{b}_2}{2 \pi K . \gamma}, \text{ où } \gamma \text{ est l'énergie de faute.}$$

La dislocation qui constitue la spire d'hélice, n'étant pas dans un même plan, n'est pas dissociée. La forme hélicoïdale est imposée par les conditions d'équilibre par glissement et diffusion le long de la dislocation (chapitre III).

Cette spire a pour équation :

$$- \pi < \varphi < + \pi$$

$$x = a (1 + \cos \varphi)$$

$$y = a \sin \varphi$$

$$z = p\varphi$$

Le nombre de lacunes absorbées, égal à $\pi \frac{a^2}{b^2}$, impose la valeur du diamètre 2 a. Le pas $2 \pi p$ peut varier par glissement. Sa valeur d'équilibre correspond au minimum d'énergie de la configuration.

La variation d'énergie entraînée par la nucléation de la boucle peut se décomposer en deux parties.

La première, ΔW_1, correspond à la variation d'énergie de la longueur de dislocation $2 \pi p$ transformée en spire d'hélice.

La seconde, ΔW_2, correspond à la variation d'énergie d'interaction de la spire avec les parties fixes de la dislocation vis.

ΔW_1 est la somme de 4 termes :

$$\Delta W_1 = 2 U_c + 2 \pi p \frac{\mu \underset{\sim}{b}_1 \underset{\sim}{b}_2}{2 \pi K} \left(\text{Log} \frac{d}{b} - 1 \right) + W_s - 2 \pi p . \frac{\mu b^2}{2 \pi K} \text{Log} \frac{2 \pi p}{r_o}$$

- $2 U_c$ est l'énergie de formation des deux pincements limitant les extrémités de la spire. Elle a été évaluée par Stroh dans les systèmes cubiques à faces centrées.

- Le second terme correspond à l'énergie de recombinaison des dislocations partielles sur une longueur $2 \pi p$.

- W_s est l'énergie de la spire d'hélice. Elle est donnée par l'intégrale double (chapitre I) que nous avons calculée à la machine (UNIVAC).

- Le quatrième terme correspond à l'énergie (changée de signe) de la longueur $2 \pi p$ de dislocation vis recombinée qui s'est transformée en spire d'hélice.

La variation d'énergie d'interaction avec le reste de la dislocation vis ΔW_2 se met sous la forme d'une intégrale (chapitre I) que nous avons calculé à la machine.

Nous avons tracé les courbes donnant la variation d'énergie totale ΔW (égale à la différence d'énergie entre la configuration obtenue (fig. IV.1) et la dislocation vis) en fonction du pas $2\pi p$ de la boucle. Ces courbes ont été tracées pour plusieurs valeurs du diamètre comprises entre une et huit distances interatomiques (ce qui correspond à un nombre de lacunes absorbées compris entre trois et deux cents environ) ainsi que pour plusieurs valeurs de l'énergie de faute (γ = 0,50 et 150 ergs/cm^2).

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. AMELINCKX et al - Phil. Mag. *2*, 355 (1957).

[2] W.C. DASH - J. Appl. Phys. *31*, 2278 (1960).

[3] G. THOMAS et M.J. WHELAN - Phil. Mag. *3*, 511 (1959).

[4] A.R. LANG - J. Appl. Phys., *30*, 1748 (1959).

[5] AUTHIER - à paraître.

[6] D.A. JONES et J.W. MITCHELL - Phil. Mag. *3*, 1 (1958).

[7] R. BULLOUGH et R.C. NEUWMAN - Phil. Mag. *5*, 921 (1960).

[8] E. KROENER - Ergeb angew Math. *5*, (1958).

[9] R. de WIT - Solid State Phys. *10*, 249 (1960).

[10] C. SNOW - Bur standards Sci. Papers *21*, 431 (1926-27).
Bur standards J. Research *9*, 419 (1932).

[11] WATSON - Treatrise on the theorie of Bessel Fonction - Cambridge - University press (1958).

[12] J. BLIN - Acta Met. *3*, 199 (1955).

[13] F.W. SHAPINK et H.B.M. WOLTERS - Phil. Mag. *6*, 1297 (1961).

[14] R. de WIT - Phys. Rev. *116*, 592 (1959).

[15] W. BONTINCK et S. AMELINCKX - Phil. Mag. *2*, 94, 561 (1957).

[16] W. BONTINCK et W. DEKEYSER - Physica *22*, 595.

[17] W.C. DASH - Report of coper stown conference on growth and perfection of crystals. New York (1958).

[18] W.C. DASH - Physical review letters - *1*, 400 (1958).

[19] J. FRIEDEL - Dislocations pergamon press (1964).

[20] J. WEERTMAN - Phys. Phys. Rev. *107*, 1259 (1957).

[21] G. SAADA - (1962). Kyoto conference on point defects - J. Phys. Soc. Jap. st, 1963.

[22] G. SAADA - Acta Met. *10*, 551 (1962).

[23] A.N. STROH - Proc. Phys. Soc. B *67*, 427 (1955).

[24] M.J. WHELAN et J. SILCOLX - Phil. Mag. *5*, 1 (1960).

[25] P.B. HIRSCH - Phil. Mag. *7*, 69 (1962).

[26] D.W. SEIDMAN et R.N. BALLUFFI - Phil. Mag. *10*, 1067 (1964).

[27] L.M. CLAREBROUGH, R.L. SEGALL, M.H. LORETTO et M.E. HARGREOVES - Phil. Mag. *9*, 377 (1964).

[28] R.B. NICHOLSON - Electron microscopy and strength of crystal - p. 874. - Interscience publishers (1962).

[29] R.B. NICHOLSON et J. NUTTING - Acta Met., *9*, 332 (1961).

[30] J. GRILHE - Acta Met. *11*, 57 (1963).

[31] J. GRILHE - Acta Met. *12*, 1081 (1964).

[32] R. de WIT - Trans. of Met. Soc. *227*, 1443 (1963).

[33] R.S. BARNES - Phil. Mag. *6*, 1487 (1961).

[34] G. DUPOUY et F. PERRIER - J. Microscopie *1*, 167 (1962).

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

Vu et approuvé :
Paris, le 5 mars 1965
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
M. ZAMANSKY

Vu
et Permis d'imprimer :
Le Recteur de l'Académie
de Paris,
Le Vice-Président du Conseil
de l'Université de Paris
J. ROCHE

IMPRIMERIE LOUIS-JEAN
Ouvrages scientifiques
TYPO-OFFSET
GAP (Hautes-Alpes)
Dépôt légal n° 271
1966